

Quasiperiodische Synchronisationszustände in Systemen global gekoppelter Oszillatoren

Stephan Kuberski

Diplomarbeit



Universität Potsdam
Institut für Physik und Astronomie

März 2016

Diese Seite ist absichtlich ohne Inhalt.

Erklärung

Hiermit erkläre ich ausdrücklich, dass die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen von mir verfasst wurde. Sämtliche Ausführungen, welche wörtlich oder inhaltlich aus anderen Arbeiten entnommen wurden, habe ich als solche kenntlich gemacht. Weiterhin erkläre ich, dass diese Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form zuvor weder von mir noch von jemanden anderen an dieser oder einer anderen Hochschule als Prüfungsleistung eingereicht wurde.



Potsdam, den 26. März 2016

Diese Seite ist absichtlich ohne Inhalt.

Inhalt

Vorwort	vii
Einleitung	1
Synchronisationstheorie	
Selbsterhaltende Schwingungen	3
Grenzzyklus und Phasenbegriff	3
Irreguläre Oszillatoren	6
Kuramoto-Sakaguchi-Modell	7
Rössler-Ensembles	
Konventionelles Ensemble	11
Modifiziertes Ensemble	20
Sakaguchi-Ensembles	
Motivation	25
Additives Rauschen	26
Multiplikatives Rauschen	31
Analyse	
Methode 1	38
Methode 2	43
Anhang	
Stochastische Differentialgleichungen	49
Fokker-Planck-Gleichung	54
Numerische Integration	55
Software	57
Bibliografie	59

Diese Seite ist absichtlich ohne Inhalt.

Vorwort

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht das Auftreten selbstorganisierter quasiperiodischer Synchronisationszustände (*self-organized quasiperiodic synchronization*, SOQ) in zwei Typen von Ensembles global gekoppelter, identischer Oszillatoren. Als Vertreter des ersten, (deterministischen) chaotischen Typs werden zwei verwandte Systeme von Rössler-Attraktoren betrachtet. Stellvertretend für den zweiten, stochastischen Typ werden Systeme gewöhnlicher Phasenoszillatoren mit additivem und multiplikativem Rauschen untersucht. In beiden Typen wird das Auftreten selbstorganisierter Quasiperiodizität nachgewiesen. Des Weiteren erfolgt eine (Teil-)Analyse der zugrundeliegenden dynamischen Systeme hinsichtlich dieses Synchronisationszustandes.

Gliederung

Die Arbeit ist grob in vier Teile gegliedert. Im ersten Teil (Kapitel „Synchronisationstheorie“) werden die allgemeinen Grundlagen der Synchronisationstheorie vorgestellt. Des Weiteren wird das hier verwendete Kuramoto-Sakaguchi-Modell der globalen Kopplung identischer Oszillatoren beschrieben. Den zweiten Teil (Kapitel „Rössler-Ensembles“ und „Sakaguchi-Ensembles“) bilden die experimentellen Untersuchungen der entsprechenden Ensembledtypen. Dort wird vorrangig das Auftreten der quasiperiodischen Synchronisation dokumentiert. Im dritten Teil (Kapitel „Analyse“) findet eine analytische Betrachtung des aufgezeigten Synchronisationszustandes statt. Weiterhin werden dabei aufgetretene Schwierigkeiten und mögliche Lösungsansätze diskutiert. Der vierte Teil gibt als „Anhang“ letztlich Einblick in die benutzten mathematischen Methoden und die entsprechende softwareseitige Implementierung.

Diese Seite ist absichtlich ohne Inhalt.

Einleitung

Schwingungsvorgänge lassen sich auf nahezu allen Längen- und Zeitskalen in der Natur vorfinden. Sie spielen sowohl in unbelebten als auch belebten Systemen eine wichtige Rolle. Ihr Auftreten reicht exemplarisch von den periodischen Bewegungen der Planeten auf ihren Umlaufbahnen über die circadianen Rhythmiken vieler Organismen bis hin zu den atomaren Vibrationen in Festkörpern. Aufgrund dieser Allgegenwart waren Schwingungsvorgänge schon seit langem im Blickfeld naturwissenschaftlicher Betrachtungen und sind heute im Allgemeinen wohl verstanden.¹

Im 17. Jahrhundert untersuchte u. a. C. HUYGENS bereits auch die gegenseitige Beeinflussung miteinander in Wechselwirkung stehender, schwingender Systeme. Seine Beobachtungen mechanischer Pendeluhrn führten ihn auf das Konzept der Synchronisation durch wechselseitige Kopplung. Darauf aufbauend führten u. a. LD. RAYLEIGH, E. APPLETON und B. VAN DER POL ähnliche Beobachtungen und Untersuchungen bis hinein ins 20. Jahrhundert fort.² Seitdem ist in den letzten Dekaden mit der Synchronisationstheorie ein eigenständiges Teilgebiet der Nichtlinearen Dynamik entstanden und viele ihrer Forschungsergebnisse haben auch bereits den Eingang in einige andere Wissenschaftszweige gefunden. Wahlweise seien hierbei allgemein die Natur- und Kognitionswissenschaften genannt — als Teilgebiete letzterer, insbesondere die Neurobiologie und -physiologie, sowie die Linguistik.³

¹ [BJPS09, Kapitel 1]

² [PRK03, Kapitel 1]

³ Einige Beispiele dazu finden sich u. a. in [MMP02, Kapitel 1].

Diese Seite ist absichtlich ohne Inhalt.

Synchronisationstheorie

Selbsterhaltende Schwingungen

Hauptuntersuchungsgegenstand der Synchronisationstheorie ist die Klasse der selbsterhaltenden Schwingungen (*self-sustained oscillations*). Mathematisch werden sie durch autonome nichtlineare dynamische Systeme beschrieben und stellen somit eine Unterklasse dynamischer Systeme dar. Neben ihrer eigentlichen Abgrenzung zu letzteren — der Existenz (mindestens) eines stabilen Grenzzyklus (*limit cycle*, s. Abschnitt „Grenzzyklus und Phasenbegriff“) — besitzen selbsterhaltende Schwingungen die folgenden qualitativ formulierten Merkmale:^{4,5}

- 1) Im System existiert eine innere Energiequelle (*internal source of energy*), aus der heraus kontinuierlich Energie in oszillierende Bewegung umgesetzt wird. Sämtliche dissipativen Effekte des Systems werden durch diese Quelle kompensiert und erst wenn sie versiegt, kommt die Schwingung zum Erliegen.
- 2) Die Form der Schwingung (bzw. des Grenzzyklus) ist ausschließlich von systemeigenen Parametern abhängig. Die Wahl der Anfangsparameter des Systems hat keinen Einfluss auf diese Form.
- 3) Die Schwingung ist stabil in dem Sinn, dass (kleine) äußere Störungen deren Form nicht ändern. Dies ist gleichbedeutend damit, dass der Grenzzyklus ein Attraktor des Systems ist.⁶

Grenzzyklus und Phasenbegriff

Im regulären Fall stellt der Grenzzyklus eines autonomen M -dimensionalen dynamischen Systems $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^M$ eine stabile und geschlossene, periodische Trajektorie \vec{x}_0 im Phasenraum dar (mit Periodendauer T_0 und $\vec{x}_0(t + T_0) = \vec{x}_0(t)$). Die Existenz einer solchen

⁴ [PRK03, Kapitel 2]

⁵ [BJPS09, Kapitel 2]

⁶ Hiermit wird der für diese Arbeit unbedeutende Fall der Multistabilität außer Acht gelassen (vgl. auch [BJPS09, Kapitel 2 und 12]).

periodischen Trajektorie impliziert, dass der Phasenraum bzw. das System mindestens die Dimension Zwei besitzen muss: $M \geq 2$. Entlang des Grenzyklus ist die Bewegung (respektive die selbsterhaltende Schwingung) hauptsächlich charakterisiert durch die Periodendauer T_0 und der dazugehörigen Eigenfrequenz (*natural frequency*) $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

Zur weiteren Beschreibung ist es sinnvoll, eine gleichförmig ansteigende Phasenvariable $\varphi(t)$ mit $\varphi(t + T_0) = \varphi(t) + 2\pi$ und $\dot{\varphi} = \omega_0$ als zeitliche Parametrisierung des Grenzyklus einzuführen. Dabei sei angemerkt, dass eine solche natürliche Phasenvariable jederzeit aus einer beliebigen, monoton ansteigenden Protophase (*protophase*) $\vartheta(t)$, welche die Beziehungen

$$\vartheta(t + T_0) = \vartheta(t) + \Theta \quad \text{und} \quad T_0 = \int_0^\Theta \left(\frac{d}{dt} \vartheta(t) \right)^{-1} d\vartheta \quad (1)$$

erfüllt, durch die Umparametrisierung

$$\varphi(t) = \omega_0 \int_0^{\vartheta(t)} \left(\frac{d}{dt} \vartheta(t) \right)^{-1} d\vartheta \quad (2)$$

gewonnen werden kann — insbesondere also auch existiert.⁷

Betrachtet man nun die Auswirkung einer externen periodischen Kraft $\vec{F}(\vec{x}, t)$ mit einer beliebigen Periodendauer T (d. h. $\vec{F}(\vec{x}, t + T) = \vec{F}(\vec{x}, t)$) als kleine Störung des Systems

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) + \varepsilon \vec{F}(\vec{x}, t), \quad \varepsilon \ll 1, \quad (3)$$

so zeigt sich folgendes Bild: Aufgrund der Tatsache, dass die Störung klein und der Grenzyklus stabil ist, bleiben die Lösungen $\vec{x}(t)$, welche sich vorerst nahe des Grenzyklus befanden, auch weiterhin in dessen näherer Umgebung. Mit dem Konzept der Isochronen — das sind die Mannigfaltigkeiten, für welche die Beziehung $\vec{x}(t) = \vec{x}(t + T_0)$ gilt — lässt sich der Phasenbegriff somit auch auf die nächste Umgebung des Grenzyklus erweitern: $\varphi(t) = \varphi(\vec{x}(t))$ für $\vec{x} \approx \vec{x}_0$.⁸

Aus der Beziehung

$$\dot{\varphi}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \varphi \cdot \dot{\vec{x}} = \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \omega_0 \quad (4)$$

für des ungestörten Systems erhält man bei vorhandener Störung den Ausdruck

$$\dot{\varphi}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \varphi \cdot \dot{\vec{x}} = \vec{\nabla} \varphi \cdot (\vec{f}(\vec{x}) + \varepsilon \vec{F}(\vec{x}, t)) = \omega_0 + \varepsilon \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{F}(\vec{x}, t). \quad (5)$$

⁷ [PRK03, Kapitel 7]

⁸ [PRK03, Kapitel 7]

Letzterer kann durch den Einsatz der Näherung $\vec{x} \approx \vec{x}_0$ in der rechten Seite der Gleichung fortgeführt werden zu

$$\dot{\varphi}(\vec{x}) = \omega_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(\vec{x}_0) \right) F_k(\vec{x}_0, t). \quad (6)$$

Benutzt man nun weiterhin die eindeutige Zuordnung zwischen $\varphi(t)$ und $\vec{x}_0(t)$ auf dem Grenzyklus, d. h. $\vec{x}_0(t) = \vec{x}_0(\varphi(t))$, so kann man schreiben

$$\dot{\varphi}(\vec{x}) = \omega_0 + \varepsilon Q(\varphi, t), \quad (7)$$

wobei $Q(\varphi, t)$ der Summe in (6) entspricht und 2π -periodisch in φ und T -periodisch in t ist.

In störungstheoretisch nullter Ordnung ($\varepsilon = 0$) lautet die Lösung von (7)

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0. \quad (8)$$

Stellt man nun die Funktion Q aufgrund ihrer Periodizität als doppelte Fourierreihe dar und setzt obige Lösung ein, so erhält man mit den Fourierkoeffizienten $c_{n,m}$ und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi/T$ der externen Kraft

$$Q(\varphi, t) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} e^{im\varphi + in\omega t} = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} e^{im\varphi_0} e^{i(m\omega_0 + n\omega)t}. \quad (9)$$

Mittelt man nun anschließend als weitere Approximation (*slow phase dynamics*) sämtliche schnell oszillierenden und nichtresonanten Terme aus dieser Beziehung heraus,⁹ so ergibt sich mit der Resonanzbedingung $m\omega_0 + n\omega \approx 0$ und der Annahme $\omega_0 \approx \omega \Rightarrow n = -m$ gerade

$$\sum_{n=-m} c_{n,m} e^{im\varphi + in\omega t} = \sum_n c_{-n,n} e^{in(\varphi - \omega t)} = q(\varphi - \omega t). \quad (10)$$

Diese gemittelte Funktion q ist 2π -periodisch und entspricht in dieser Approximation der obigen Funktion Q .

Das Einsetzen in (7) liefert

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon q(\varphi - \omega t),^{10} \quad (11)$$

⁹ [PRK03, Kapitel 7]

was im Weiteren durch Einführung der Phasendifferenz $\psi = \varphi - \omega t$ und der Frequenzdifferenz $\nu = \omega - \omega_0$ übergeht in

$$\dot{\psi} = -\nu + \varepsilon q(\psi). \quad (13)$$

Diese Gleichung nennt man für den simpelsten 2π -periodischen Fall $q(\psi) = \sin \psi$ auch Adler-Gleichung (nach R. ADLER).

Obige Gleichung (11) ist der essentielle Ausgangspunkt der Synchronisationstheorie im Allgemeinen und im Besonderen auch für die weiteren Betrachtungen dieser Arbeit. Zusammengefasst beschreibt diese Gleichung die Phasendynamik selbsterhaltender Schwingungen mit der natürlichen Frequenz ω_0 unter dem Einfluss einer periodischen Wechselwirkung mit der Frequenz ω .

Irreguläre Oszillatoren

Die im vorherigen Abschnitt getätigten Aussagen gehen von der Existenz eines regulären Grenzyklus aus. Sofern es sich bei dem zugrundeliegenden dynamischen System jedoch um eine irreguläre selbsterhaltende Schwingung handelt, gilt diese Irregularität im Allgemeinen auch für deren Grenzyklus. Der Grenzyklus der in dieser Arbeit u. a. untersuchten chaotischen Rössler-Oszillatoren stellt beispielsweise einen irregulären seltsamen Attraktor (*strange attractor*) dar (s. a. Kapitel „Rössler-Ensembles“). In diesen Fällen erschwert bzw. verunmöglicht sich die Angabe oder Definition einer Phasenvariable bzw. Frequenz im o. g. Sinn.

Mitunter zeigen jedoch auch irreguläre Attraktoren eine annähernd periodische (*almost periodic*) Struktur oder es existieren geeignete Transformationen, welche diese in solche überführen. Unter diesen Voraussetzungen ist es dann z. B. möglich, die Frequenz als Mittelwert (*mean frequency*) aus einer genügend großen Anzahl an Umläufen N_τ und der dazu benötigten Zeit τ über $\omega = 2\pi N_\tau / \tau$ zu bestimmen.¹¹ Des Weiteren ist es möglich, mit einer der

¹⁰ Analog erhält man für die Resonanzbedingung $k\omega_0 \approx l\omega$ mit teilerfremden natürlichen Zahlen k, l

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon q(k\varphi - l\omega t) \quad (12)$$

als Verallgemeinerung (s. [PRK03, Kapitel 7]).

¹¹ [PRK03, Kapitel 1 und 5]

folgenden Methoden die Protophase ϑ des Oszillators festzulegen:¹²

- 1) Durch die Wahl eines geeigneten Poincaré-Schnittes, dessen Fläche beim n -ten Umlauf der Trajektorie zum Zeitpunkt t_n geschnitten wird, erhält man die Protophase

$$\vartheta(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \quad \text{für } t_n \leq t < t_{n+1}. \quad (14)$$

- 2) Findet sich im System eine geeignete, oszillierende Variable $s(t)$, so ist mit deren Hilbert-Transformation

$$\tilde{s}(t) = \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(u)}{t - u} du \quad (15)$$

und der Beziehung

$$A(t)e^{i\vartheta(t)} = s(t) + i\tilde{s}(t) \quad (16)$$

eine weitere Protophase beschrieben.^{13,14}

- 3) Lässt sich für das System eine passende, zweidimensionale Projektionsebene angeben, auf welcher die Trajektorie $(x(t), y(t))$ des Grenzzyklus ein Zentrum (\tilde{x}, \tilde{y}) umläuft, so ist über

$$\vartheta(t) = \arctan \frac{y(t) - \tilde{y}}{x(t) - \tilde{x}} \quad (17)$$

ebenfalls eine Protophase gegeben.¹⁵

Über Gleichung (2) lässt sich diese Protophase anschließend in eine natürliche Phasenvariable φ transformieren.

Kuramoto-Sakaguchi-Modell

Das Wesen der Synchronisation selbsterhaltender Oszillationen besteht in der Anpassung ihrer Schwingungsfrequenzen infolge einer schwachen periodischen Beeinflussung. Dabei sind grundsätzlich zwei Fälle zu unterscheiden:

¹² [RPK97]

¹³ Die Notation $\text{P} \int (\cdot)$ bezeichnet hierbei den cauchyschen Hauptwert (*Cauchy principal value*) des Integrals.

¹⁴ Für den Fall, dass die rechte Seite von (16) verschwindet, ist die Phase hier undefiniert.

¹⁵ Hierbei ist sicherzustellen, dass die Trajektorie niemals direkt durch das Zentrum läuft: $(x(t), y(t)) \neq (\tilde{x}, \tilde{y})$.

- 1) Das Einwirken einer, wie im vorangegangenen Kapitel beschriebenen, äußeren periodischen Kraft (*synchronization by external drive*).
- 2) Die gegenseitige Beeinflussung mehrerer beteiligter selbsterhaltender Schwingungen (*synchronization by mutual coupling*).

Obgleich der prinzipiellen Unterschiede beider Fälle können die oben gemachten Erkenntnisse des ersten Problems gleichermaßen auf das letztere angewandt werden.

Betrachten man beispielsweise das wechselseitige Zusammenspiel zweier selbsterhaltender Schwingungen

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}_1 = \vec{f}_1(\vec{x}_1) + \varepsilon \vec{F}_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ \dot{\vec{x}}_2 = \vec{f}_2(\vec{x}_2) + \varepsilon \vec{F}_2(\vec{x}_2, \vec{x}_1) \end{cases} \quad \text{mit } \varepsilon \ll 1, \quad (18)$$

welche über die Funktionen \vec{F}_1 und \vec{F}_2 schwach miteinander gekoppelt sind, so erhält man in analoger Vorgehensweise zu der im Abschnitt „Grenzzyklus und Phasenbegriff“ gezeigten Methode die folgende Phasendynamik des Systems

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_{0,1} + \varepsilon q_1(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_{0,2} + \varepsilon q_2(\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases} \quad (19)$$

Dabei stehen $\omega_{0,1}, \omega_{0,2}$ für die individuellen natürlichen Frequenzen beider Oszillatoren und $\varphi_1 = \omega_1 t$ bzw. $\varphi_2 = \omega_2 t$ für deren momentane Phasen. Die weitere, iterative Anwendung desselben Verfahrens für N global gekoppelte (jeder mit jedem), identische ($\forall k : \omega_{0,k} = \omega_0$ und $q_k(\cdot) = q(\cdot)$), selbsterhaltende Schwingungen führt dann mit der 2π -periodischen Kopplungsfunktion q letztlich auf

$$\dot{\varphi}_k = \omega_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^N q(\varphi_k - \varphi_j), \quad k = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Kuramoto-Modell und Sakaguchi-Kopplung

Für den Fall der simpelsten 2π -periodischen, globalen Kopplung $q(\cdot) = \sin(\cdot)$ und einer von N abhängigen Gewichtung geht Gleichung (20) über in das nach Y. KURAMOTO benannte

¹⁶ [PRK03, Kapitel 8]

¹⁷ [PRK03, Kapitel 11 und 12]

Kuramoto-Modell^{18,19}

$$\dot{\varphi}_k = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_k).^{20} \quad (21)$$

Dieses Modell beschreibt die Phasendynamik eines Ensembles von N global gekoppelten, identischen selbsterhaltenden Oszillatoren.

Zur weiteren Betrachtung ist es hilfreich, das komplexe Mittelfeld (*complex mean field*) $\mathcal{F} = Ke^{i\Theta}$ als Mittelwert aller Oszillatoren einzuführen:

$$Ke^{i\Theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\varphi_k}. \quad (22)$$

Durch Anwendung der eulerschen Formel

$$K \cos \Theta + iK \sin \Theta = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos \varphi_k + i \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin \varphi_k \quad (23)$$

vereinfacht sich daraufhin Gleichung (21) zu

$$\dot{\varphi}_k = \omega_0 + \varepsilon K \sin(\Theta - \varphi_k). \quad (24)$$

Diese Beziehung kann so gedeutet werden, dass jeder der beteiligten Oszillatoren durch das periodische Mittelfeld in seiner Schwingung genau so beeinflusst wird, wie dies auch im Abschnitt „Grenzyklus und Phasenbegriff“ für eine periodische, externe Kraft beschrieben wird.

Des Weiteren ist mit der Amplitude des Mittelfelds ein Indikator (*order parameter*) für die Stärke der Synchronisation gegeben: Befindet sich zumindest ein Teil der Oszillatoren in einem kohärenten Schwingungszustand, führen deren Phasen über Gleichung (22) zu einer nichtverschwindenden Amplitude K , welche ihrerseits zu einer verstärkten Kopplung in (24) führt. Im anderen Extrem, dass sämtliche Phasen gleichverteilt sind, führt dieser inkohärente Zustand zu einer verschwindenden Mittelfeldamplitude, was gleichbedeutend mit

¹⁸ [Kur84, Kapitel 5]

¹⁹ [PRK03, Kapitel 12]

²⁰ Das hier im Vergleich zu (20) umgekehrte Vorzeichen der Phasendifferenz $\varphi_j - \varphi_k$ ist Konvention. Durch Umbenennung der Fourierkoeffizienten $c_{-n,n} \rightarrow c_{n,-n}$ für $n \rightarrow -n$ in (10) ist deren Identität gegeben.

der Lösung der gegenseitigen Kopplung ist.²¹ Dieses Verhalten kann auch als selbstorganisierte Synchronisation (*self-organized synchronisation*) bezeichnet werden.^{22,23}

Eine andere Darstellung von (24) ermöglicht sich durch die Transformation in kartesische Koordinaten via

$$x_k = \cos \varphi_k, \quad y_k = \sin \varphi_k. \quad (25)$$

Man erhält damit das folgende, äquivalente System

$$\begin{cases} \dot{x}_k = -\omega_0 y_k + \varepsilon (y_k^2 \operatorname{Re} \mathcal{F} - x_k y_k \operatorname{Im} \mathcal{F}) \\ \dot{y}_k = \omega_0 x_k + \varepsilon (-x_k y_k \operatorname{Re} \mathcal{F} + x_k^2 \operatorname{Im} \mathcal{F}) \end{cases}, \quad (26)$$

mit dem bereits oben bezeichneten komplexen Mittelfeld $\mathcal{F} = K e^{i\theta}$. Betrachtet man nun darin, statt der alleinigen Kopplung durch \mathcal{F} , eine Kopplung durch ein phasenverschobenes Mittelfeld $e^{i\beta} \mathcal{F} = K e^{i(\theta+\beta)}$, so ergibt sich als Phasendynamik die abgeänderte Form von (24):

$$\dot{\varphi}_k = \omega_0 + \varepsilon K \sin(\theta - \varphi_k + \beta). \quad (27)$$

Diese hier als Sakaguchi-Kopplung²⁴ (nach H. SAKAGUCHI) bezeichnete Kopplungsart ist die Basis der weiteren Untersuchungen in den Kapiteln „Rössler-Ensembles“ und „Sakaguchi-Ensembles“. Beleuchtet wird dabei, inwiefern sich die Frequenz des Mittelfeldes von der des Ensembles in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke ε und dem Phasenparameter β unterscheidet. Das Auftreten einer signifikanten Abweichung beider (*frequency mismatch* oder *detune*) wird dabei als selbstorganisierte Quasiperiodizität (SOQ) bezeichnet.

²¹ Die hier gemachte Ausführung gilt natürlich nur für eine hinreichend große Ensemblegröße N .

²² [Kur84, Kapitel 5]

²³ [PRK03, Kapitel 4 und 12]

²⁴ [SK86]

Rössler-Ensembles

Konventionelles Ensemble

Als erstes Beispiel für das Auftreten eines selbstorganisierten quasiperiodischen Synchronisationszustandes in Ensembles chaotischer Oszillatoren sei hier ein System aus N global gekoppelten, identischen, konventionellen Rössler-Oszillatoren betrachtet. Die Dynamik eines isolierten (d. h. ungekoppelten), individuellen Rössler-Attraktors ist dabei über

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (28)$$

mit den Parametern $a = 0.2$, $b = 0.2$ und $c = 5.7$ gegeben.^{25,26} Mit der bereits genannten Sakaguchi-Kopplung stellt sich damit das Gesamtensemble dar als

$$\begin{cases} \dot{x}_k = -y_k - z_k + \varepsilon \operatorname{Re}(e^{i\beta} \mathcal{F}) \\ \dot{y}_k = x_k + ay_k + \varepsilon \operatorname{Im}(e^{i\beta} \mathcal{F}) \\ \dot{z}_k = b + z_k(x_k - c) \end{cases} \quad \text{mit } k = 1, \dots, N \quad (29)$$

und der Kopplungsstärke $\varepsilon \ll 1$, dem Kopplungsparameter $\beta \in [-\pi, \pi)$ und dem komplexen Mittelfeld

$$\mathcal{F} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k + iy_k). \quad (30)$$

Die Wahl dieses Mittelfeldes ist v. a. dadurch motiviert, dass die individuellen Oszillatoren gerade bei der Projektion auf die xy -Ebene eine annähernd periodische Trajektorie aufweisen²⁷ (s. Abbildung 1).

²⁵ [Rös76]

²⁶ Die Wahl anderer Parameter hat in einem gewissen Bereich nur geringfügigen Einfluss auf die qualitative Form des Attraktors. Es sei jedoch angemerkt, dass die u. a. in [PRZK99] angegebenen Parameter $a = 0.15$, $b = 0.4$ und $c = 8.5$ eine leicht symmetrischere Gestalt bewirken, welche jedoch bei Weitem nicht an die des später betrachteten modifizierten Rössler-Attraktors heranreicht.

²⁷ Im Sinne der in Abschnitt „Irreguläre Oszillatoren“ gemachten Ausführungen.

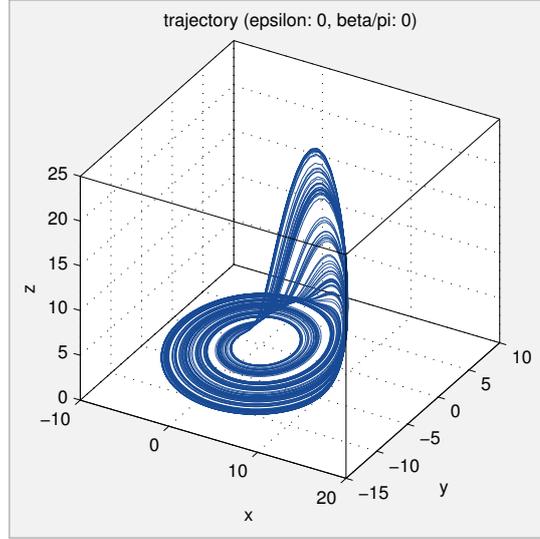


Abbildung 1: Trajektorie eines ungekoppelten ($\varepsilon = 0$), konventionellen Rössler-Attraktors. Die Projektionen derartiger Trajektorien auf die xy -Ebene zeigen dort eine annähernd periodische Struktur.

Datenerfassung

Zur Datenerfassung wurde das dynamische System (29) mit den im Anhang dargestellten Methoden (s. Abschnitte „Numerische Integration“ und „Software“) numerisch integriert.

Während des Durchlaufens einer Einschwingphase (*transition phase*) von etwa 250 Perioden wurden durch Mittelwertbildung geeignete Zentren $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$ aller individuellen Oszillatoren bestimmt. In einer daran anschließenden Erhebungsphase (*acquisition phase*) von etwa 125 Perioden erfolgte die Bemessung der momentanen (Proto-)Phasen nach Methode 3) des Abschnitts „Irreguläre Oszillatoren“ über

$$\varphi_k(t) = \arctan \frac{y_k(t) - \tilde{y}_k}{x_k(t) - \tilde{x}_k}. \quad (31)$$

Deren zeitliche Ableitungen

$$\dot{\varphi}_k(t) = \frac{(x_k(t) - \tilde{x}_k)\dot{y}_k(t) - \dot{x}_k(t)(y_k(t) - \tilde{y}_k)}{(x_k(t) - \tilde{x}_k)^2 + (y_k(t) - \tilde{y}_k)^2} \quad (32)$$

konnten leicht aus den vorhandenen Daten der numerischen Integration gewonnen werden und legten die zugehörigen Momentanfrequenzen $\omega_k(t) = \dot{\varphi}_k(t)$ fest. Entsprechende

momentane Einzelamplituden wurden via

$$A_k(t) = \sqrt{(x_k(t) - \tilde{x}_k)^2 + (y_k(t) - \tilde{y}_k)^2} \quad (33)$$

bestimmt.²⁸

Auf die im o. g. Abschnitt genannte, weitere und abschließende Umformulierung in natürliche Phasen- und Frequenzvariablen über Gleichung (2) wurde an dieser Stelle verzichtet. Dieser Verzicht erfolgte zum einen aufgrund der Tatsache, dass die ermittelten (Proto-)Phasen bereits von genügend großer Konsistenz hinsichtlich ihrer Monotonie und ihres gleichmäßigen Anstiegs waren (s. Abbildung 2). Zum anderen deshalb, da eine im Weiteren erfolgende, zeitliche Mittelung ohnehin etwaige (kleine) Abweichungen bereinigte. Die Polardarstellung des Mittelfeldes $\mathcal{F} = Ke^{i\Theta}$ wurde in analoger Weise ermittelt:

$$\Theta(t) = \arctan \frac{\langle y_k(t) - \tilde{y}_k \rangle_k}{\langle x_k(t) - \tilde{x}_k \rangle_k}, \quad K(t) = \sqrt{\langle x_k(t) - \tilde{x}_k \rangle_k^2 + \langle y_k(t) - \tilde{y}_k \rangle_k^2}, \quad (35)$$

mit der Momentanfrequenz $\Omega(t) = \dot{\Theta}(t)$,

$$\dot{\Theta}(t) = \frac{\langle x_k(t) - \tilde{x}_k \rangle_k \langle \dot{y}_k(t) \rangle_k - \langle \dot{x}_k(t) \rangle_k \langle y_k(t) - \tilde{y}_k \rangle_k}{\langle x_k(t) - \tilde{x}_k \rangle_k^2 + \langle y_k(t) - \tilde{y}_k \rangle_k^2}. \quad (36)$$

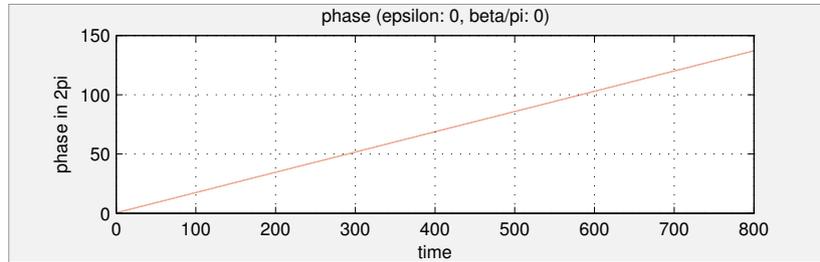


Abbildung 2: Verlauf der momentanen (Proto-)Phasen des Mittelfeldes (hellrot) und eines einzelnen Oszillators (hellgrau, überdeckt durch das Mittelfeld). Die Phasen zeigen eine konsistente strenge Monotonie und einen nahezu konstanten Anstieg.

²⁸ Die tatsächliche Implementierung erfolgte über eine initiale Translation $(x_k, y_k) \rightarrow (x_k - \tilde{x}_k, y_k - \tilde{y}_k)$ und anschließende Auswertung von

$$\varphi_k = \arctan \frac{y_k}{x_k}, \quad \dot{\varphi}_k = \frac{x_k \dot{y}_k - \dot{x}_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} \quad \text{und} \quad A_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}. \quad (34)$$

²⁹ Die Notation $\langle \cdot \rangle_k$ bezeichnet hier das Ensemblemittel über alle Oszillatoren $k = 1, \dots, N$.

Wie im Abschnitt „Irreguläre Oszillatoren“ bereits beschrieben, ist es für irreguläre Oszillatoren zielführend, statt der o. g. Momentanwerte, über eine ausreichend große Anzahl von Perioden gemittelte Werte zu betrachten. Für die einzelnen Oszillatoren wurden daher die zeitlichen Mittelwerte

$$\omega_k = \langle \omega_k(t) \rangle_t \quad \text{und} \quad A_k = \langle A_k(t) \rangle_t, \quad (37)$$

und für das Mittelfeld die Werte

$$\Omega = \langle \Omega(t) \rangle_t \quad \text{und} \quad K = \langle K(t) \rangle_t \quad (38)$$

bestimmt.³⁰ Da des Weiteren alle beteiligten Oszillatoren identisch in ihrer Art, d. h. insbesondere auch in ihren Frequenzen und Amplituden sind, ist es ausreichend, künftig lediglich die folgenden Ensemblemittel zu betrachten

$$\omega = \langle \omega_k \rangle_k \quad \text{und} \quad A = \langle A_k \rangle_k. \quad (39)$$

Mit den in (38) und (39) genannten Größen ist sowohl das Mittelfeld als auch das Ensemble als Ganzes hinreichend beschrieben. Das Auftreten selbstorganisierter quasiperiodischer Synchronisation wird über die Frequenzdifferenz des Mittelfeldes und des Ensembles in Abhängigkeit von den Kontrollparametern ε und β indiziert:

$$\Delta(\varepsilon, \beta) = \Omega(\varepsilon, \beta) - \omega(\varepsilon, \beta). \quad (40)$$

Zur Überprüfung einer ausreichend starken Synchronisation dient hierbei der normierte Ordnungsparameter

$$R(\varepsilon, \beta) = \frac{K(\varepsilon, \beta)}{A(\varepsilon, \beta)}. \quad (41)$$

Maskierung

Bei dem hier betrachteten System aus irregulären, chaotischen Rössler-Attraktoren kann es für bestimmte Kontrollparameter zu einer sogenannten Trichterbildung ihrer Trajektorien kommen (*funnel attractors*). Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass sie sich in einer derart

³⁰ Die Notation $\langle \cdot \rangle_t$ bezeichnet hier den Mittelwert über alle diskreten Zeitschritte.

ungünstigen Weise im Phasenraum krümmen, welche eine o. g. Phasenbestimmung unmöglich macht (s. Abbildung 3). In einigen wenigen Fällen gilt diese Unbestimmtheit auch für das Mittelfeld — besonders dann, wenn dessen Amplitude sehr klein ist.

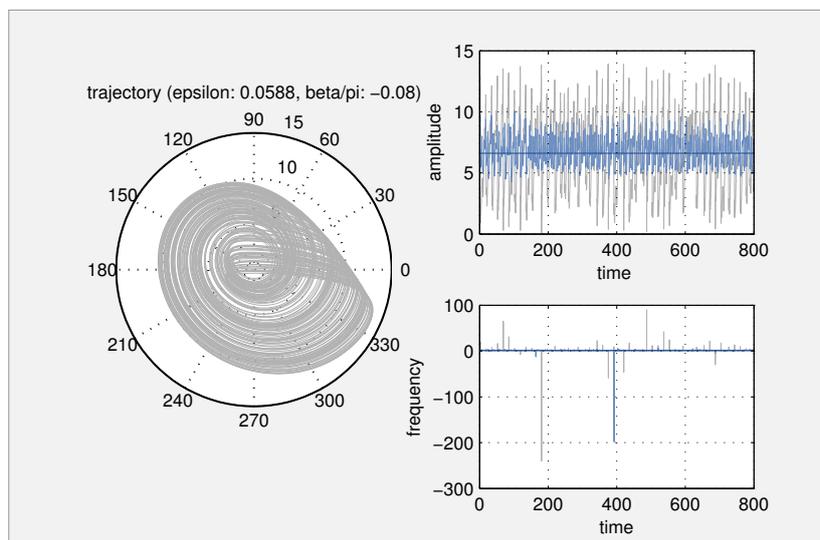


Abbildung 3: Polartransformation der Trajektorie eines trichterbildenden Oszillators (hellgrau). Die Trajektorie umkreist nicht immer das Zentrum, was sich im Auftreten negativer Momentanfrequenzen niederschlägt. Ebenfalls dargestellt sind das momentane Ensemblemittel (hellblau) und dessen zeitlicher Mittelwert (dunkelblau).

Da diese genannten Fälle immer vom Auftreten negativer Momentanfrequenzen begleitet sind, ist es zur Vergrößerung der Aussagekraft der erhobenen Daten hilfreich, ebensolche zu maskieren. Als Indikatoren wurden dabei die folgenden Akkumulationen benutzt:³¹ Für das Ensemble

$$\omega^- = \sum_t \sum_k |\omega_k(t)| \quad \text{für } \omega_k(t) < 0, \quad (42)$$

und für das Mittelfeld

$$\Omega^- = \sum_t |\Omega(t)| \quad \text{für } \Omega(t) < 0. \quad (43)$$

³¹ Die Notation ist so zu verstehen, dass hier ausschließlich die Absolutwerte negativer Frequenzen über alle (diskreten) Zeitschritte aufsummiert werden.

In Abbildung 4 sind diese Indikatoren grafisch dargestellt. Die tatsächliche Maskierung ungünstiger Kontrollparameter erfolgte dann durch die Beschränkung auf den Parameterbereich

$$\{\varepsilon, \beta : \omega^-(\varepsilon, \beta) = 0 \wedge \Omega^-(\varepsilon, \beta) = 0\}.$$
³² (44)

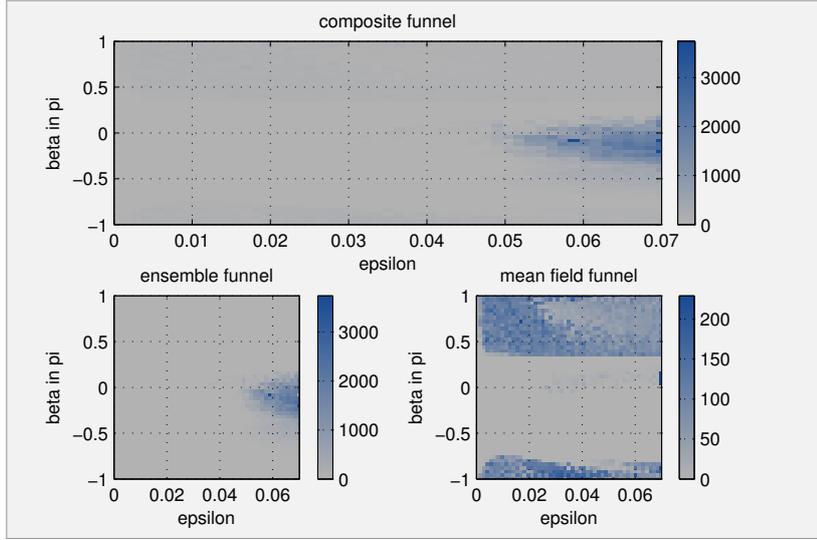


Abbildung 4: Darstellung der Indikatoren für die Trichterbildung ω^- und Ω^- . Zusammengefasst ist ebenfalls das Maximum beider abgebildet.

Als weiterer Maskierungsindikator wurde der Ordnungsparameter $R(\varepsilon, \beta)$ aus Gleichung (41) benutzt. Da der hier untersuchte Effekt der selbstorganisierten Quasiperiodizität lediglich bei ausgeprägter Mittelfeldamplitude (d. h. bei starker Synchronisation) interessant bzw. von Bedeutung ist, wurden alle Fälle, in denen im Mittel weniger als die Hälfte der Oszillatoren kohärent schwingen ebenfalls maskiert:

$$\{\varepsilon, \beta : R(\varepsilon, \beta) \geq 0.5\}.$$
 (45)

Abbildung 5 gibt diesen Indikator grafisch wieder.

³² Dies bedeutet die Maskierung sämtlichen Auftretens negativer Frequenzen.

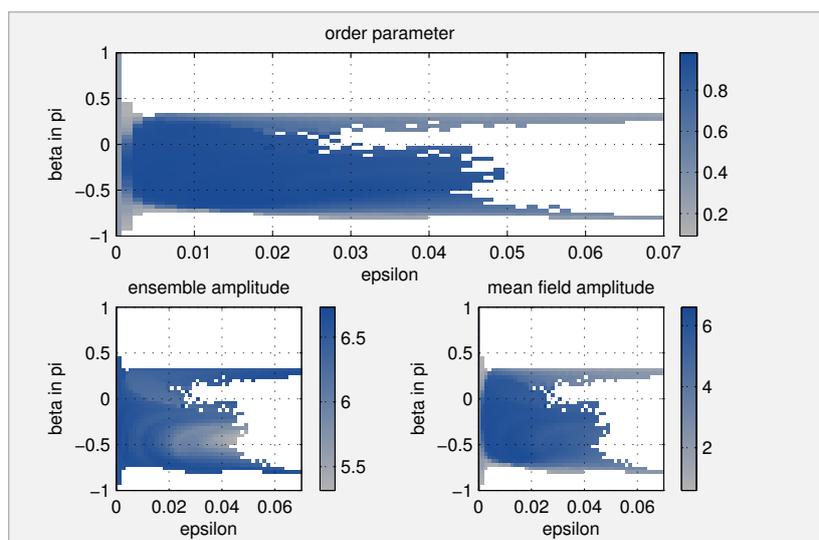


Abbildung 5: Darstellung der Oszillator- und Mittelfeldamplituden sowie des Ordnungsparameters R . Hierbei sind lediglich die Werte abgebildet, welche nicht bereits wegen negativer Frequenzen maskiert wurden.

Ergebnisse

Unter dem Ausschluss der o. g. problematischen Parameterbereiche und der anschließenden Beschränkung auf interessante Gebiete stellt sich das Ausmaß der selbstorganisierten quasi-periodischen Synchronisation, wie in Abbildung 6 grafisch gezeigt, dar. Abgebildet sind darin neben den Mittelfeld- und Ensemblefrequenzen die Frequenzunterschiede $\Delta(\varepsilon, \beta)$ nach Gleichung (40). Deutlich lassen sich zwei horizontale Regime erkennen:

- 1) Im oberen Halbteil (bei $\beta \approx 0.25\pi$, rötlich kodiert) zeigt sich ein Gebiet mit positivem Frequenzunterschied (SOQ-I). Dort liegt die mittlere Frequenz des Mittelfeldes über der des Ensemblemittels.
- 2) In der unteren Hälfte (bei $\beta \approx -0.75\pi$, bläulich kodiert) befindet sich ein Gebiet mit negativem Frequenzunterschied (SOQ-II). In diesem läuft das Mittelfeld im zeitlichen Mittel dem Ensemble hinterher.

Ebenso ist eine annähernde β -Symmetrie (wie auch in den vorherigen Abbildungen 4 und 5) erkennbar. Diese verläuft jedoch wider Erwartens nicht entsprechend einer natürlichen Phasensymmetrie entlang der Linie $\beta = 0$, sondern vielmehr längs $\beta \approx -0.25\pi$.

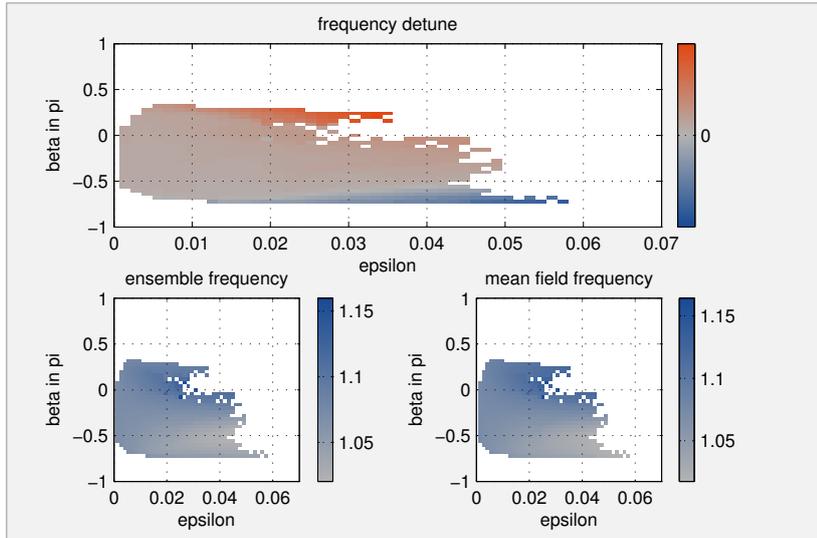


Abbildung 6: Darstellung der Mittelfeld- und Ensemblefrequenzen sowie deren Frequenzunterschiede. Letztere sind folgendermaßen farbkodiert: positive Werte rötlich (SOQ-I), negative Werte bläulich (SOQ-II), Werte nahe Null grau.

Im Weiteren seien hier zwei β -Schnitte an den Stellen ausgeprägtester Effektstärke gezeigt. Für den SOQ-I-Bereich liegt dieser bei $\beta = 0.24\pi$ und ist in Abbildung 7 dargestellt. Deutlich erkennbar ist darin, wie der Frequenzunterschied mit zunehmender Kopplungsstärke ε anwächst. Abbildung 8 zeigt selbiges Verhalten für den SOQ-II-Bereich bei $\beta = -0.72\pi$. In beiden Fällen nimmt die Mittelfeldamplitude ab einer gewissen Kopplungsstärke entgegen aller Erwartung zunehmend ab. Quantifiziert ergibt sich beide Male eine absolute Effektstärke (Frequenzdifferenz) von etwa 0.03 rad/s.

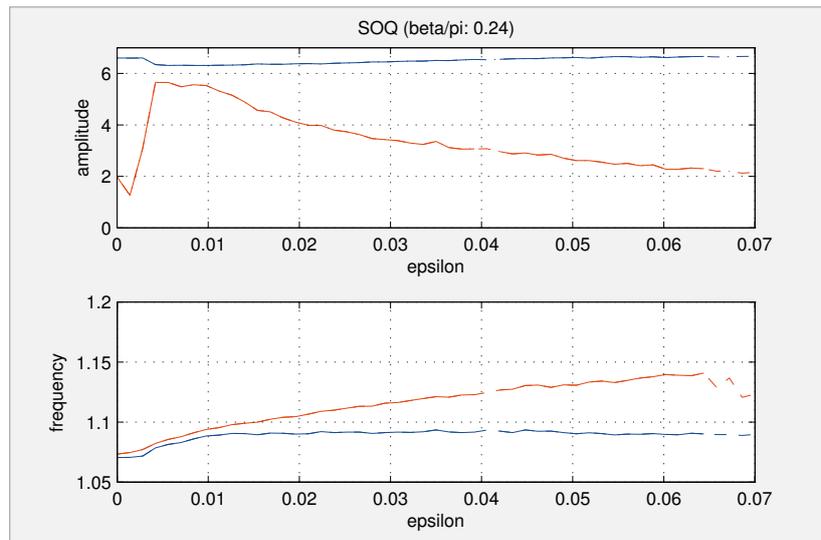


Abbildung 7: Darstellung des SOQ-I-Effekts über die Amplituden und Frequenzen des Mittelfeldes (rot) und des Ensemblemittels (blau). Messwerte innerhalb des problematischen Parameterbereichs der Trichterbildung sind gestrichelt markiert.

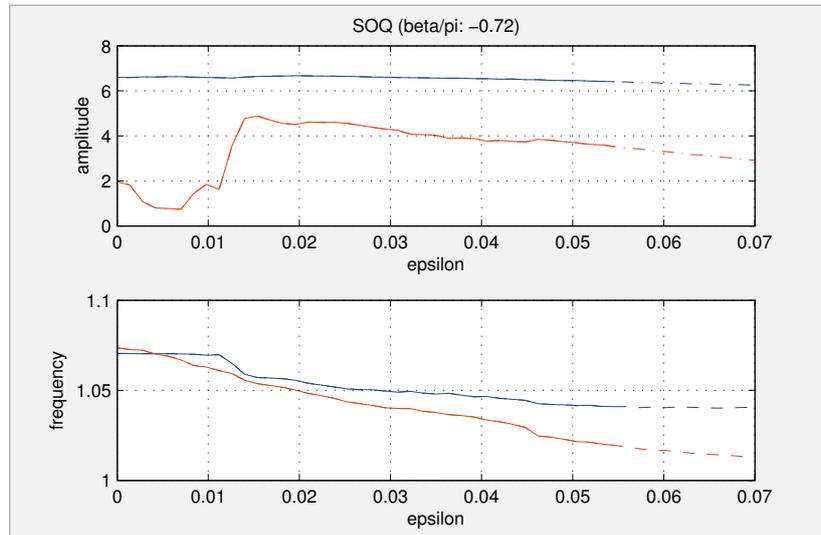


Abbildung 8: Darstellung des SOQ-II-Effekts über die Amplituden und Frequenzen des Mittelfeldes (rot) und des Ensemblemittels (blau). Messwerte innerhalb des problematischen Parameterbereichs der Trichterbildung sind gestrichelt markiert.

Modifiziertes Ensemble

Als weiteres chaotisches Beispiel für das Auftreten von selbstorganisierter Quasiperiodizität sei hier ein modifiziertes Rössler-Ensemble untersucht. Das gegenüber dem oben betrachteten Ensemble (29) leicht abgewandelte System mit der Dynamik

$$\begin{cases} \dot{x}_k = \frac{e}{2}x_k - y_k - z_k \frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2} + \varepsilon \operatorname{Re}(e^{i\beta}\mathcal{F}) \\ \dot{y}_k = \frac{e}{2}y_k + x_k - z_k \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} + \varepsilon \operatorname{Im}(e^{i\beta}\mathcal{F}) \\ \dot{z}_k = f + z_k(x_k - c) \end{cases} \quad \text{für } k = 1, \dots, N \quad (46)$$

mit den Systemparametern $e = 0.15$, $f = 0.2$ und $c = 10$ zeichnet sich vor diesem v. a. über seine größere Symmetrie aus.³³ Als Kopplungsmodell sei weiterhin die o. g. Sakaguchi-Kopplung mit einer Kopplungsstärke $\varepsilon \ll 1$ und dem Kopplungsparameter $\beta \in [-\pi, \pi)$ gewählt. Die Trajektorie eines freien, ungekoppelten Oszillators ($\varepsilon = 0$) ist in Abbildung 9 dargestellt.

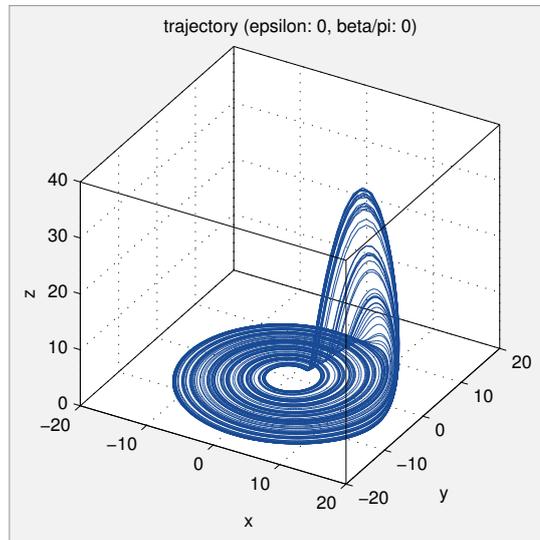


Abbildung 9: Trajektorie eines isolierten, modifizierten Rössler-Attraktors. Im Vergleich zum konventionellen Attraktor in Abbildung 1 zeigt dieser eine verbesserte Symmetrie in der xy -Ebene.

³³ [RPK97]

Sämtliche der oben im Abschnitt „Konventionelles Ensemble“ getätigten Ausführungen über die Datenerfassung wurden auch auf dieses Ensemble angewandt. Insbesondere stellte sich auch hier die Bestimmung der (Proto-)Phasen als genügend konsistent heraus, sodass gleichermaßen auf eine Umparametrisierung in natürliche Phasenvariablen verzichtet werden konnte (s. Abbildung 10).

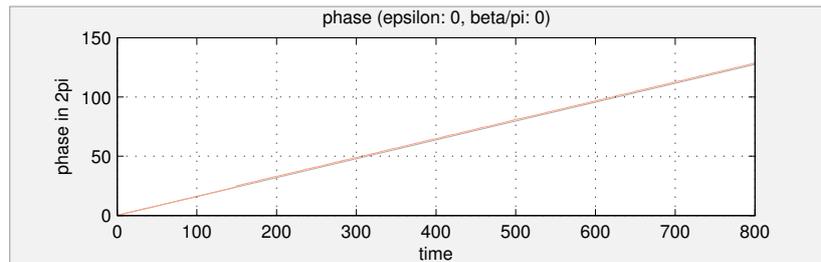


Abbildung 10: Zeitlicher Verlauf der Phasenvariablen des Mittelfelds (hellrot) und des Ensembles (hellgrau, verdeckt durch das Mittelfeld). Auch hier zeigt sich eine konsistente Monotonie und ein gleichmäßiger Anstieg.

Ebenfalls analog zu obiger Vorgehensweise erfolgte die Datenmaskierung zur Erhöhung der Aussagekraft der Messwerte. Die Abbildungen 11 und 12 zeigen grafisch die zugehörigen Maskierungsindikatoren.

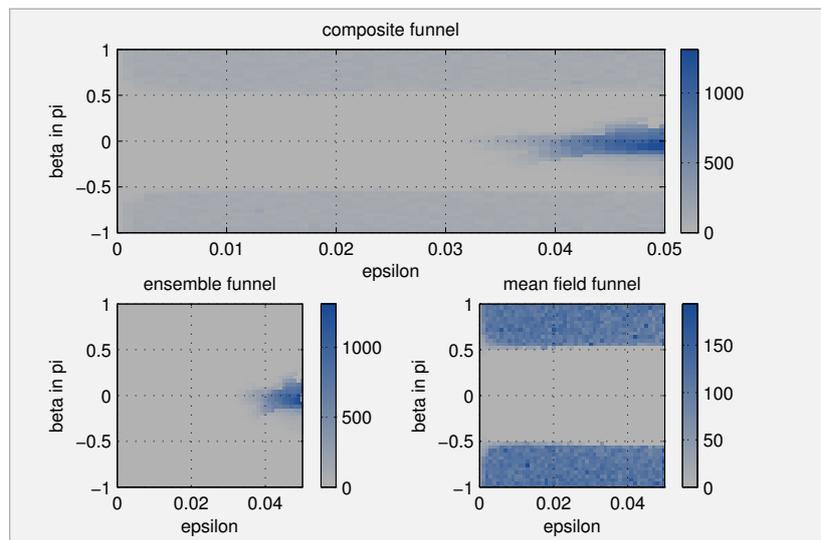


Abbildung 11: Darstellung der Indikatoren für die Trichterbildung.

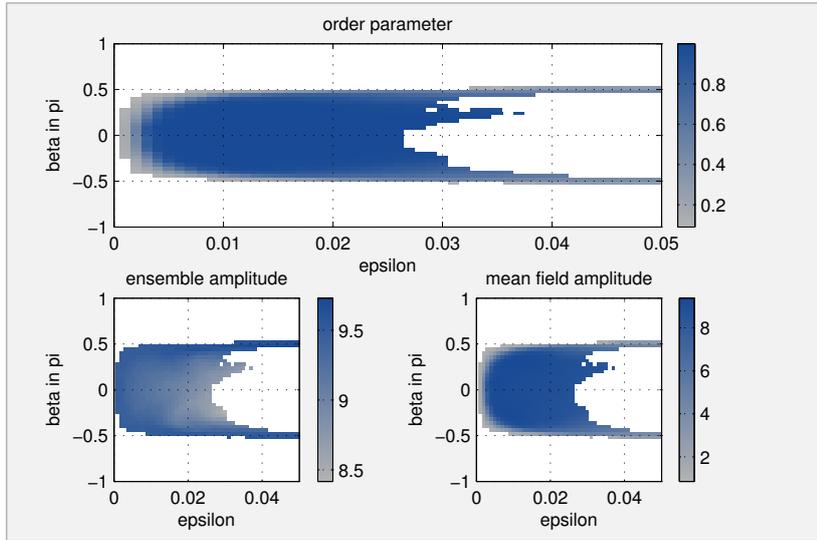


Abbildung 12: Darstellung der zeitlich gemittelten Amplituden des Ensemblemittels und des Mittelfeldes sowie des Ordnungsparameters R . Gezeigt werden lediglich die Werte, welche nicht bereits wegen Trichterbildung maskiert wurden. Sehr gut zu erkennen ist hierin eine verbesserte β -Symmetrie gegenüber dem konventionellen Ensemble in Abbildung 5.

Die Auswertung der Frequenzunterschiede $\Delta(\epsilon, \beta)$ bzgl. des Auftretens und der Stärke der quasiperiodischen Synchronisation führte so auch hier zu ähnlichen Resultaten wie für das konventionelle Rössler-Ensemble (s. Abbildung 13): Selbstorganisierte Quasiperiodizität tritt vornehmlich in zwei Gebieten auf:

- 1) In der oberen Hälfte (bei $\beta \approx 0.5\pi$, rötlich kodiert) befindet sich ein Regime mit positiven Frequenzdifferenzen, in welchem die Frequenz des Mittelfeldes größer ist als die des Ensemblemittels (SOQ-I).
- 2) Im unteren Halbtteil (bei $\beta \approx -0.5\pi$, bläulich kodiert) zeigt sich ein Regime negativer Frequenzdifferenzen (SOQ-II). Dort liegen die Frequenzen des Mittelfeldes unter denen des Ensembles.

Ein nennenswerter Unterschied besteht u. a. in der Symmetrie bzgl. der β -Achse. Diese ist nun wesentlich stärker ausgeprägt und verläuft entlang der erwarteten Linie $\beta = 0$.

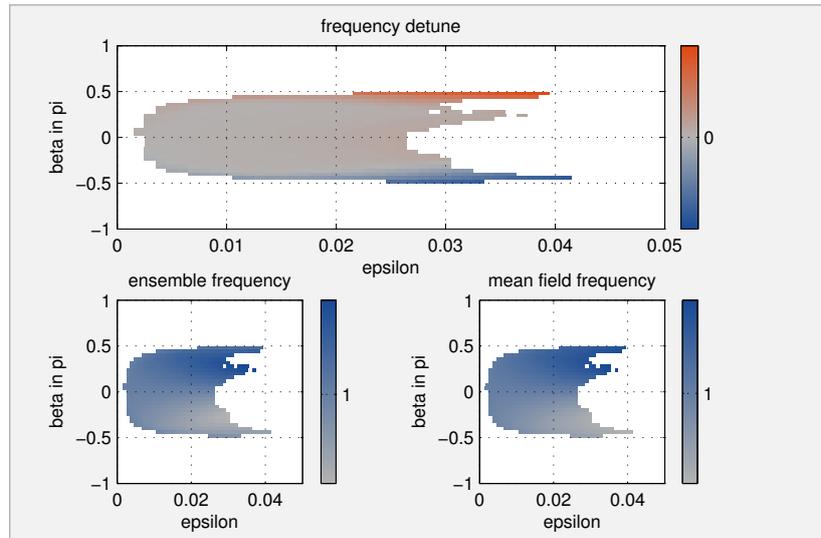


Abbildung 13: Darstellung der gemittelten Ensemble- und Mittelfeldfrequenzen sowie deren Frequenzunterschiede. Wiedergegeben sind lediglich die Werte, für welche keine Trichterbildung indiziert wurde und deren Synchronisationsstärke aussagekräftig ist. Das SOQ-I-Regime ist rötlich, das SOQ-II-Regime bläulich kodiert.

Im Folgenden seien nun wiederum zwei β -Schnitte an den prägnantesten Stellen des SOQ-Effektes dargestellt. Abbildung 14 gibt einen detaillierteren Einblick in dessen ε -Abhängigkeit für das SOQ-I-Regime bei $\beta = 0.44\pi$. Hierin zeigt sich erneut die Zunahme der Stärke des Effektes mit steigender Kopplung. Dieselbe Beschaffenheit weist auch der Schnitt für das SOQ-II-Regime bei $\beta = -0.44\pi$ in Abbildung 15 auf. Die absolute Stärke des Effektes beträgt in beiden Fällen etwa 0.01 rad/s.

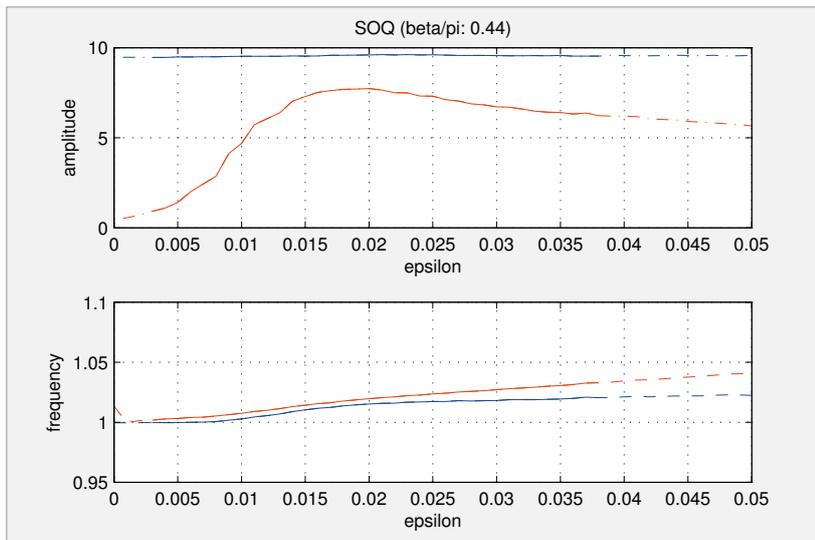


Abbildung 14: Darstellung des SOQ-I-Effektes über die gemittelten Amplituden und Frequenzen des Mittelfeldes (rot) und des Ensemblemittels (blau). Gestrichelt markiert sind die problematischen Bereiche der Trichterbildung.

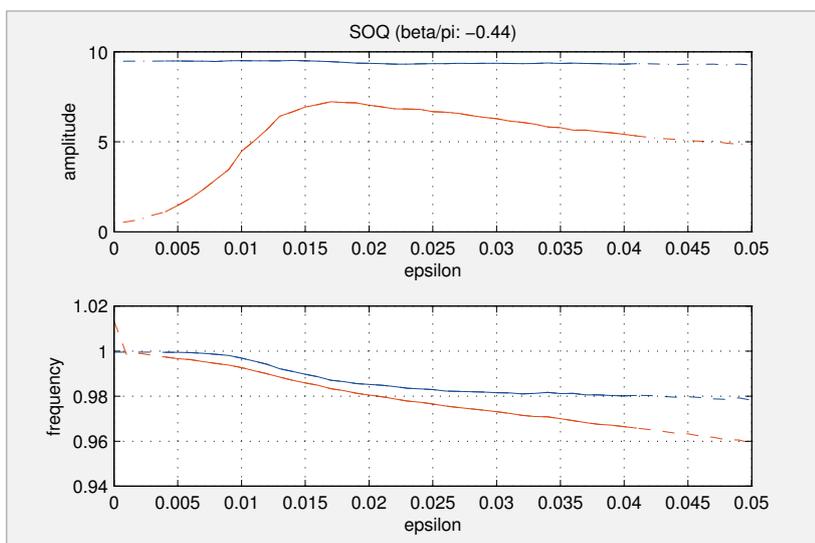


Abbildung 15: Darstellung des SOQ-II-Effektes über die gemittelten Amplituden und Frequenzen des Mittelfeldes (rot) und des Ensemblemittels (blau). Gestrichelt markiert sind die problematischen Bereiche der Trichterbildung.

Sakaguchi-Ensembles

Motivation

Betrachtet man die Polardarstellung der xy -Projektionen beider oben untersuchten Rössler-Ensembles

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_k = 1 + \frac{z_k}{A_k} \sin \varphi_k + a \sin \varphi_k \cos \varphi_k + \varepsilon \frac{K}{A_k} \sin(\Theta - \varphi_k + \beta) \\ \dot{A}_k = -z_k \cos \varphi_k + a A_k \sin^2 \varphi_k + \varepsilon K \cos(\Theta - \varphi_k + \beta) \end{cases} \quad (\text{konventionell}) \quad (47)$$

bzw.

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_k = 1 + \varepsilon \frac{K}{A_k} \sin(\Theta - \varphi_k + \beta) \\ \dot{A}_k = -z_k \cos \varphi_k + \frac{e}{2} A_k + \varepsilon K \cos(\Theta - \varphi_k + \beta) \end{cases} \quad (\text{modifiziert}), \quad (48)$$

so zeigt sich wie erwartet eine Ähnlichkeit ihrer Phasendynamiken mit dem allgemeinen Kuramoto-Sakaguchi-Modell eines Phasenoszillators (Gleichung (27), Abschnitt „Kuramoto-Sakaguchi-Modell“ im Kapitel „Synchronisationstheorie“).³⁴ Insbesondere sticht hierbei die große Ähnlichkeit des modifizierten Rössler-Ensembles hervor.³⁵

Da im Zuge dieser Arbeit keine befriedigende analytische Beschreibung des SOQ-Effektes für chaotische Systeme gefunden wurde und dieser Effekt auch nicht in nichtchaotischen, deterministischen Systemen zutage trat, lag es nahe, entsprechende stochastische Ensembles zu modellieren und zu untersuchen. Als starkes Indiz für das Auffinden selbstorganisierter Quasiperiodizität auch in solchen Systemen diene hierbei die Betrachtung der Autokorrelationsfunktion der Momentanfrequenz des konventionellen Rössler-Attraktors (s. Abbildung 16). Die annähernde Unkorreliertheit dieser Werte und der Vergleich zur Autokorrelation

³⁴ In beiden Fällen haben die zugrundeliegenden Rössler-Oszillatoren eine natürliche Frequenz von $\omega_0 = 1$. Die allgemeine Formulierung eines Rössler-Systems der Frequenz ω_0 lautet nach [RPK96]

$$\begin{cases} \dot{x} = -\omega_0 y - z \\ \dot{y} = \omega_0 x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (49)$$

³⁵ Diese Tatsache war auch der ursprüngliche Beweggrund für die Untersuchung dieses Ensembles.

von gaußischem weißen Rauschen (*gaussian white noise*) motivierte letztlich die folgende, hier dargestellte Untersuchung.

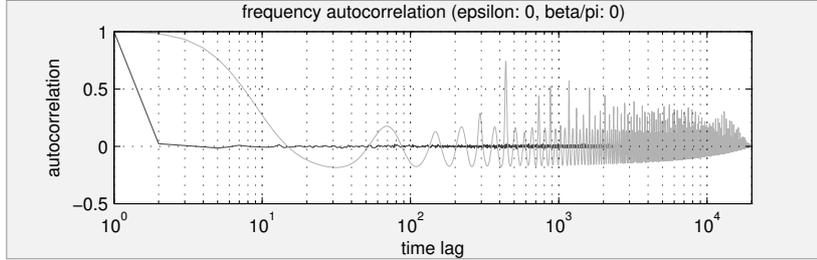


Abbildung 16: Autokorrelationsfunktion der Momentanfrequenzen eines (freien) konventionellen Rössler-Attraktors (hellgrau) und eines gaußschen weißen Rauschens (dunkelgrau).

Additives Rauschen

Als erstes Modell für den Nachweis selbstorganisierter quasiperiodischer Synchronisation in stochastischen Ensembles sei das folgende Ensemble aus N Phasenoszillatoren mit additivem Rauschen betrachtet:

$$\dot{\varphi}_k = \omega_0 + \varepsilon K \sin(\Theta - \varphi_k + \beta) + \sqrt{2\Gamma} \xi_k \quad \text{für } k = 1, \dots, N, \quad (50)$$

mit den Systemparametern der Eigenfrequenz $\omega_0 = 1$ und $\Gamma = 0.75 \cdot 10^{-3}$ als der Stärke des gaußschen weißen Rauschens $\xi_k(t)$. Die Kopplung erfolgt erneut als Sakaguchi-Kopplung mit der Kopplungsstärke $\varepsilon \ll 1$ und dem Kopplungsparameter $\beta \in [-\pi, \pi)$.

Datenerfassung

Entsprechend der im Anhang, Abschnitt „Stochastische Differentialgleichungen“ gemachten Ausführungen handelt es sich beim vorliegenden System um ein System von stochastischen Differentialgleichungen. In integraler Schreibweise stellt sich dieses dar als:

$$d\varphi_k = (\omega_0 + \varepsilon K \sin(\Theta - \varphi_k + \beta)) dt + \sqrt{2\Gamma} dW_k. \quad (51)$$

³⁶ Entgegen der Notation im genannten Kapitel benennt hier die Schreibweise dW_k einen k -ten Wiener-Prozess.

Die numerische Integration erfolgte wie im Anhang, Abschnitt „Numerische Integration“ beschrieben. Nach einer Einschwingphase von etwa 250 Perioden erfolgte die Datenerhebung über eine Dauer von etwa 125 Perioden. Das komplexe Mittelfeld $\mathcal{F} = Ke^{i\theta}$ wurde über die Beziehungen

$$\mathcal{F} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\cos \varphi_k(t) + i \sin \varphi_k(t)) = X(t) + iY(t) \quad (52)$$

und

$$K(t) = \sqrt{X(t)^2 + Y(t)^2}, \quad \Theta(t) = \arctan \frac{Y(t)}{X(t)} \quad (53)$$

ermittelt. Die zeitliche Ableitung des letzten Ausdrucks lieferte dessen Momentanfrequenz:

$$\Omega(t) = \frac{X(t)\dot{Y}(t) - \dot{X}(t)Y(t)}{X(t)^2 + Y(t)^2}, \quad (54)$$

mit

$$\dot{X}(t) = -\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{\varphi}_k(t) \sin \varphi_k(t) \quad \text{und} \quad \dot{Y}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{\varphi}_k(t) \cos \varphi_k(t). \quad (55)$$

Auf eine geeignete Zentrierung (wie im Abschnitt „Konventionelles Ensemble“, Kapitel „Rössler-Ensembles“ beschrieben) konnte hier verzichtet werden, da es sich bei den zugrundeliegenden Oszillatoren bereits um zentrierte Phasenoszillatoren handelt. Ebenfalls wurde die anschließende Umparametrisierung der (Proto-)Phasen in natürliche Phasenvariablen aus den im selben Abschnitt genannten Gründen ausgespart.

Maskierung

Die zur Aufwertung der Aussagekraft der Messwerte angewandte Datenmaskierung erfolgte ebenfalls analog der im o. g. Abschnitt angegebenen Methode. Da im vorliegenden Modell von Phasenoszillatoren keine Trichterbildung der Trajektorien möglich war, erfolgte die Maskierung auf der Grundlage von (44) lediglich für den Ausschluss numerischer Instabilitäten der arctan-Funktion bei (sehr) kleinen Amplituden. Abbildung 17 zeigt die entsprechenden Indikatoren grafisch. Abbildung 18 stellt die Werte des Ordnungsparameters $R(\varepsilon, \beta)$ dar. Die Bestimmung desselben vereinfachte sich in diesem Fall wegen der konstanten Amplituden aller Phasenoszillatoren $A_k = 1$ zu

$$R(\varepsilon, \beta) = K(\varepsilon, \beta). \quad (56)$$

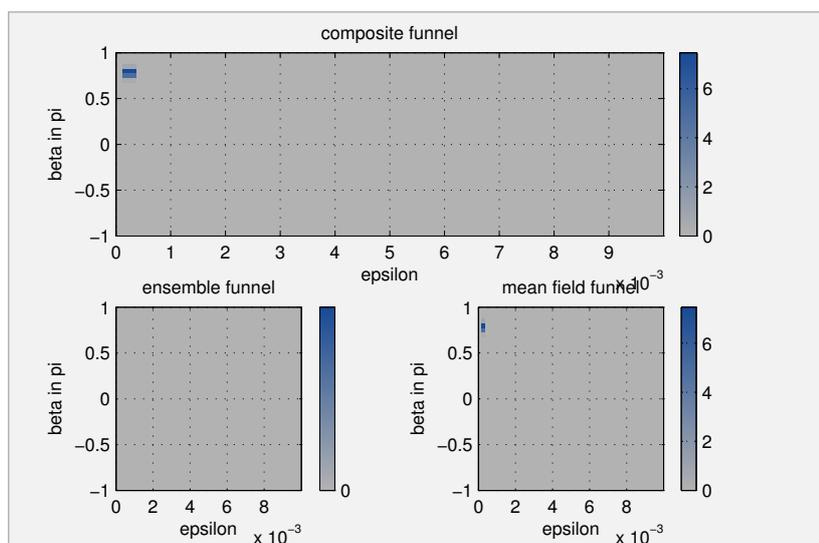


Abbildung 17: Darstellung der Indikatoren für das Auftreten negativer Frequenzen.

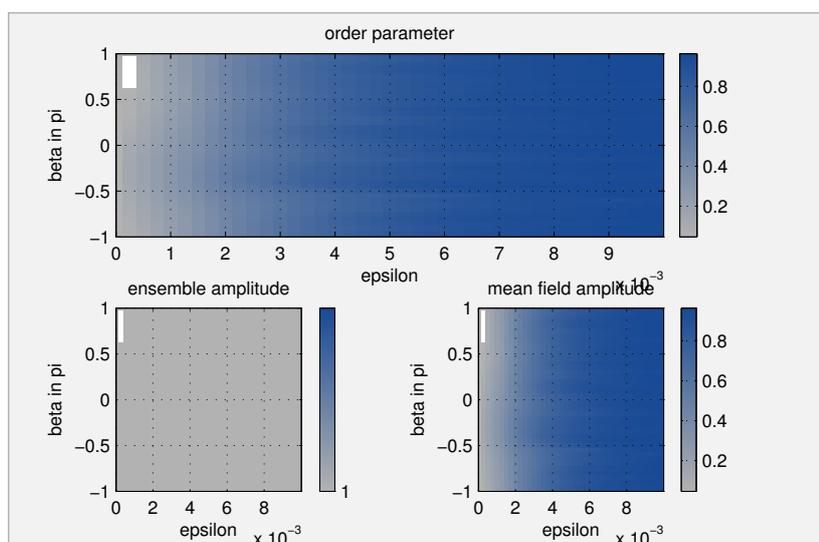


Abbildung 18: Darstellung der gemittelten Amplituden des Ensembles und des Mittelfeldes sowie des Ordnungsparameters R . In diesem Fall entsprechen letzterem gerade die Mittelfeldamplituden.

In beiden Abbildungen zeigt sich keine β -Abhängigkeit. Gleichwohl wird im Folgenden eine solche leichte Abhängigkeit für das Auftreten des SOQ-Effektes nachgewiesen.

Ergebnisse

Als Maß für die Stärke bzw. das Auftreten des SOQ-Effektes sind in Abbildung 19 die Frequenzunterschiede zwischen Mittelfeld und Ensemble dargestellt. Entgegen der Darstellungen in den vorherigen Abbildungen 17 und 18 ist hier eine leichte β -Abhängigkeit der Frequenzunterschiede $\Delta(\varepsilon, \beta)$ festzuhalten. Des Weiteren zeigen sich erneut zwei, hier jedoch weniger ausgeprägte SOQ-Regime:

- 1) Im oberen Bereich (für etwa $-0.2\pi < \beta < 0.8\pi$, rötlich kodiert) liegen die Mittelfeldfrequenzen deutlich über denen des Ensemblemittels (SOQ-I).
- 2) In der unteren Hälfte (für etwa $-1.2\pi < \beta < 0.2\pi$, bläulich kodiert) befindet sich ein Gebiet, in welchem das Mittelfeld langsamer schwingt als das Gesamtensemble (SOQ-II).

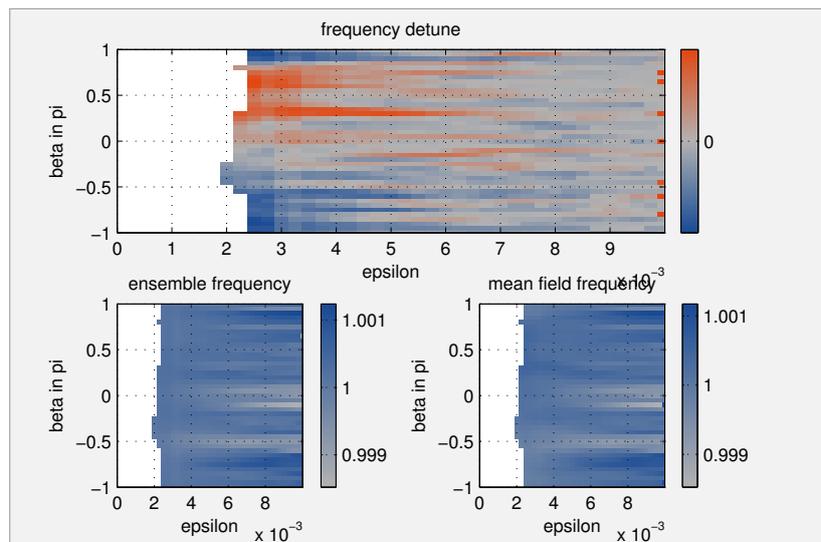


Abbildung 19: Darstellung der mittleren Mittelfeld- und Ensemblefrequenzen sowie deren Frequenzunterschiede. Positive Differenzen sind rötlich, negative Differenzen bläulich kodiert. Gezeigt sind lediglich die Werte, welche nicht aufgrund von Instabilitäten oder zu geringer Synchronisationsstärke maskiert wurden.

In der Abbildung ist eine leichte Symmetrie bzgl. der β -Achse erkennbar. Diese Symmetrie verläuft etwa entlang der Linie $\beta = -0.2\pi$ und trennt grob die beiden SOQ-Regime

mit positiven und negativen Frequenzunterschieden. Zwei folgende β -Schnitte verdeutlichen die ε -Abhängigkeit in diesen Regimen.

Abbildung 20 zeigt den Verlauf für $\beta = 0.3\pi$. Deutlich ist zu erkennen, dass mit steigender Kopplungsstärke ε die Stärke des SOQ-Effekts bzw. der Frequenzunterschied zwischen Mittelfeld und Ensemble abnimmt. Aus Abbildung 21 ist ersichtlich, dass derselbe Zusammenhang auch für die absolute Frequenzdifferenz im SOQ-II-Regime besteht. In beiden Fällen nimmt wie erwartet die Synchronisationsstärke mit wachsender Kopplungsstärke zu. Qualitativ liegt die Effektstärke sowohl im SOQ-I- als auch im SOQ-II-Gebiet bei weniger als etwa einem Tausendstel Radianten je Sekunde.

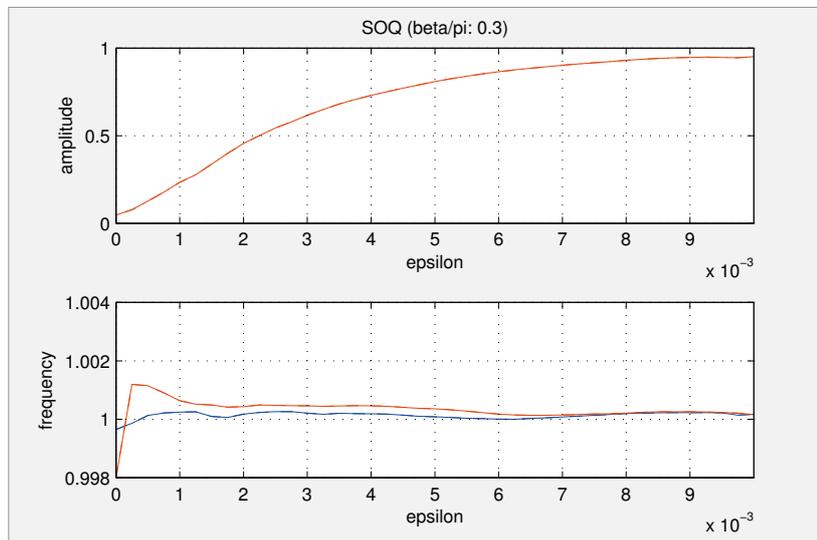


Abbildung 20: Darstellung des SOQ-Effektes über die Amplituden und Frequenzen des Mittelfeldes (rot) und des Ensemblemittels (blau) im SOQ-I-Regime.

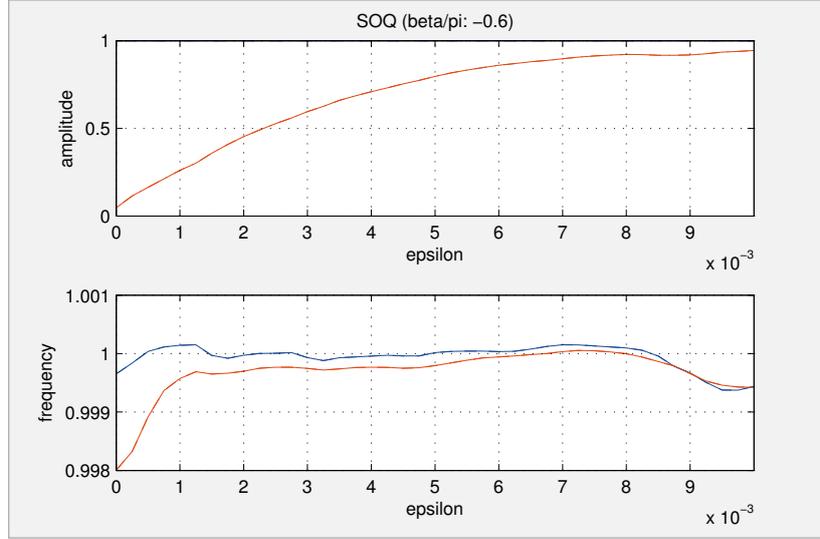


Abbildung 21: Darstellung des SOQ-Effektes über die Amplituden und Frequenzen des Mittelfeldes (rot) und des Ensemblemittels (blau) im SOQ-II-Regime.

Multiplikatives Rauschen

Als weiteres, abgewandeltes Modell eines Ensembles aus stochastischen Phasenoszillatoren wurde das folgende System mit multiplikativem Rauschen untersucht:

$$\dot{\varphi}_k = \omega_0 + \varepsilon \frac{K}{1 + \sqrt{2\Gamma}\xi_k} \sin(\Theta - \varphi_k + \beta). \quad (57)$$

Dabei handelt es sich abermals um ein Ensemble mit globaler Sakaguchi-Kopplung der Kopplungsstärke $\varepsilon \ll 1$ und Kopplungsparameter $\beta \in [-\pi, \pi)$. Als Systemparameter wurden die Eigenfrequenz mit $\omega_0 = 1$ und die Stärke des gaußschen weißen Rauschens $\xi_k(t)$ mit $\Gamma = 0.75 \cdot 10^{-3}$ festgelegt.

Für die Darstellung als ein System stochastischer Differentialgleichungen in integraler Schreibweise ist es sinnvoll, die folgende Taylor-Entwicklung zu benutzen:

$$\frac{K}{1 + \xi} = K - K\xi + \dots \quad (58)$$

Damit ergibt sich dann

$$d\varphi_k = (\omega_0 + \varepsilon K \sin(\Theta - \varphi_k + \beta)) dt - \varepsilon K \sqrt{2\Gamma} \sin(\Theta - \varphi_k + \beta) dW_k. \quad (59)$$

Dieses System wurde experimentell äquivalent zum obigen additiven Ensemble behandelt.

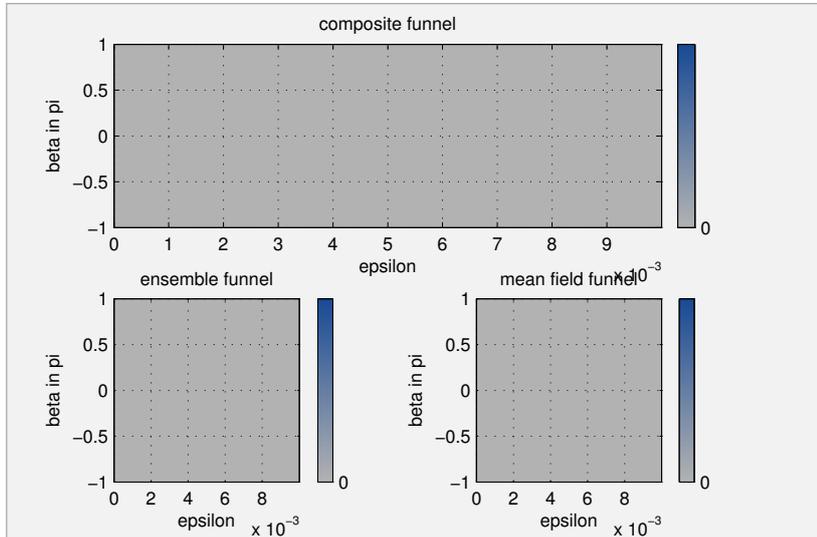


Abbildung 22: Darstellung der Indikatoren für das Auftreten negativer Frequenzen.

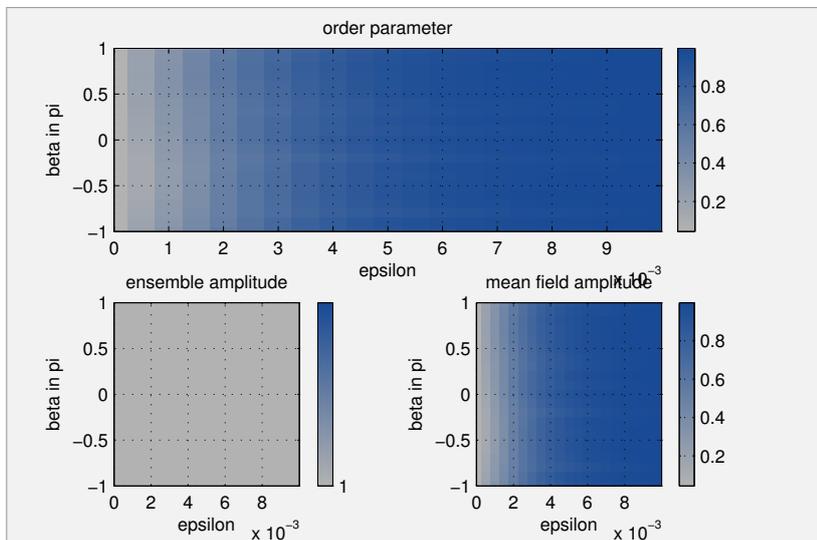


Abbildung 23: Darstellung der Amplituden des Ensembles und Mittelfeldes sowie des Ordnungsparameters R . Letzter ist hier identisch zur Mittelfeldamplitude.

Die Abbildungen 22 und 23 stellen die oben bereits beschriebenen Maskierungsindikatoren grafisch dar. Wie auch bereits im additiven Fall lässt sich darin keine β -Abhängigkeit erkennen. Die Abbildung 24 dokumentiert jedoch eine leichte Gebietsaufteilung bzgl. der Frequenzdifferenzen von Mittelfeld und Ensemble:

- 1) Im Gebiet für etwa $-0.4\pi < \beta < 0.6\pi$ (bläulich kodiert) dominieren negative Frequenzunterschiede (SOQ-II). Dort läuft das Mittelfeld dem Ensemblemittel hinterher.
- 2) Das Gebiet für etwa $-1.4\pi < \beta < -0.4\pi$ (rötlich kodiert) wird vornehmlich von positiven Frequenzdifferenzen beherrscht (SOQ-I). Dort schwingt das Mittelfeld mit einer größeren Frequenz als das Ensemble.

Auffällig ist in diesem Fall, dass im Gegensatz zu den bisherigen betrachteten Ensembles die Gebiete positiver und negativer Frequenzunterschiede ihre Lage vertauscht haben. Auch zu erkennen ist, dass die Ausprägung und Abgrenzung beider Gebiete hier weniger prägnant ist. Dies verdeutlichen zusätzlich die beiden β -Schnitte in den Abbildungen 25 und 26.

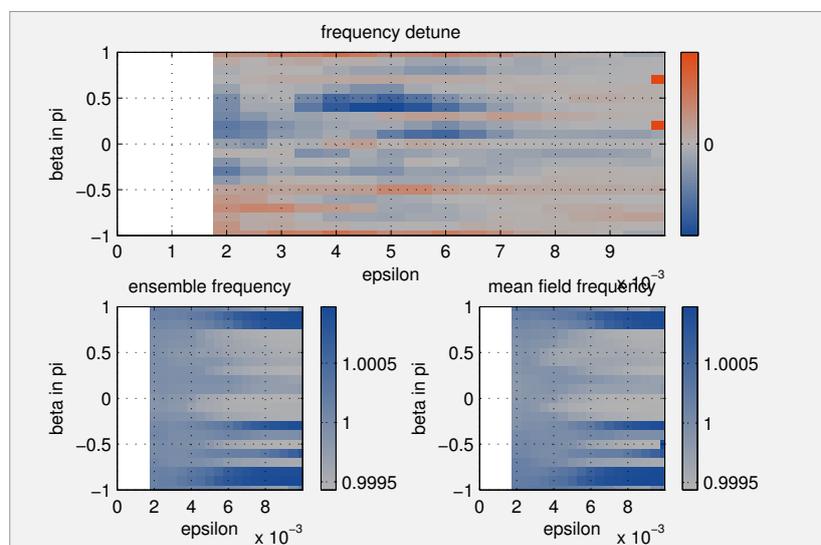


Abbildung 24: Darstellung der Frequenzen des Ensembles und des Mittelfeldes sowie deren Frequenzunterschiede. Positive Frequenzdifferenzen sind rötlich, negative Differenzen bläulich kodiert.

Dort zeigen sich zum einen nur schwache absolute SOQ-Effektstärken von lediglich

einigen Zehntausendstel Radianten je Sekunde und zum anderen ist keine deutliche ε -Abhängigkeit mehr ersichtlich. Somit ist zwar auch für diesen Ensembletyp eine leichte selbstorganisierte Quasiperiodizität nachgewiesen, wird jedoch im Folgenden aufgrund ihrer geringen Ausprägung nicht weiter untersucht.

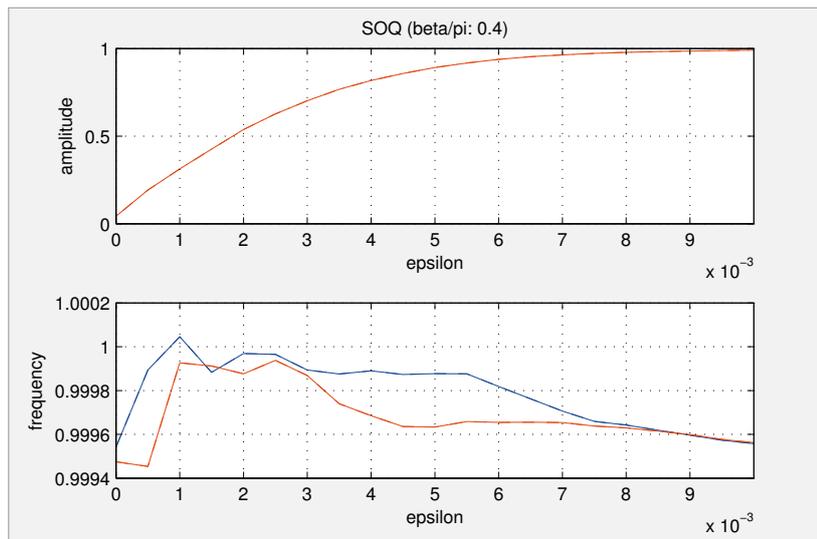


Abbildung 25: Amplituden und Frequenzen des Mittelfeldes (rot) und des Ensembles (blau) im SOQ-II-Regime.

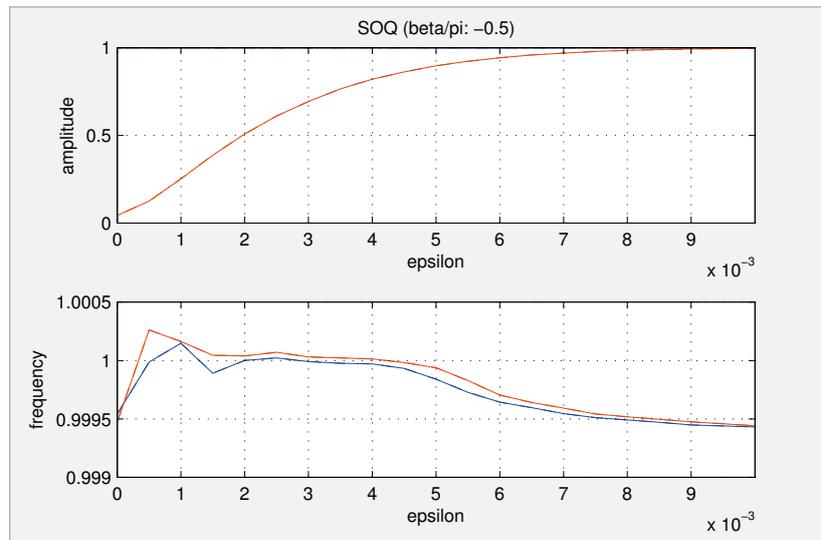


Abbildung 26: Amplituden und Frequenzen des Mittelfeldes (rot) und des Ensembles (blau) im SOQ-I-Regime.

Diese Seite ist absichtlich ohne Inhalt.

Analyse

Die in den Kapiteln „Rössler-Ensembles“ und „Sakaguchi-Ensembles“ getätigten Untersuchungen haben folgende Ergebnisse gezeigt:

- 1) Sowohl in den chaotischen Rössler-Ensembles als auch in den stochastischen Sakaguchi-Ensembles existiert das Phänomen der selbstorganisierten quasiperiodischen Synchronisation.
- 2) In allen Fällen teilt sich das Synchronisationsregime in zwei, relativ symmetrische Bereiche auf. Diese unterscheiden sich hinsichtlich des Vorzeichens der Frequenzdifferenz zwischen Mittelfeld und Ensemblemittel.
- 3) Die Lage beider Gebiete differiert in allen Systemen. In den chaotischen Ensembles zeigen sich jedoch Ähnlichkeiten. So liegen dort die Regionen stärkster Effektausprägung jeweils bei etwa $\beta = \pm 0.5\pi$.
- 4) Die Effektstärke ist mit etwa 0.03 rad/s im konventionellen Rössler-Ensemble am größten und nimmt über die Systeme modifiziertes Rössler-Ensemble (0.01 rad/s), additives Sakaguchi-Ensemble (< 0.001 rad/s) und multiplikatives Sakaguchi-Ensemble (≈ 0.0001 rad/s) ab.³⁷

Wie in den vorherigen Kapiteln bereits beschrieben, besteht der Effekt der selbstorganisierten Quasiperiodizität in der signifikanten Abweichung der mittleren Mittelfeldfrequenz

$$\Omega = \langle \dot{\theta}(t) \rangle_t \quad (60)$$

von der mittleren Ensemblefrequenz

$$\omega = \langle \langle \dot{\phi}_k(t) \rangle_t \rangle_k = \langle \langle \dot{\phi}_k(t) \rangle_k \rangle_t, \quad (61)$$

d. h.

$$\Omega - \omega \neq 0. \quad (62)$$

Im Folgenden werden zwei Methoden vorgestellt, welche versuchen, die Erwartungswerte in (60) und (61) bzw. deren Abhängigkeit von den Kopplungsparametern ε und β analytisch zu

³⁷ Alle Ensembles haben die natürliche Eigenfrequenz von $\omega_0 = 1$ rad/s.

beschreiben. Die Ausgangslage stellt in beiden Fällen die stochastische Fassung des Kuramoto-Sakaguchi-Modells (24) mit additivem Rauschen dar:

$$\dot{\varphi}_k = \omega_0 + \varepsilon K \sin(\Theta - \varphi_k + \beta) + \sqrt{2\Gamma} \xi_k \quad \text{für } k = 1, \dots, N. \quad (63)$$

Dabei repräsentiert $\xi_k(t)$ ein gaußsches weißes Rauschen mit

$$\langle \xi_k(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \xi_k(t) \xi_k(s) \rangle \sim \delta(t - s) \quad (64)$$

und einer Stärke von $\sqrt{2\Gamma}$. Nach Anhang, Abschnitt „Stochastische Differentialgleichungen“ lautet Gleichung (63) dann in integraler Schreibweise

$$d\varphi_k = (\omega_0 + \varepsilon K \sin(\Theta - \varphi_k + \beta)) dt + \sqrt{2\Gamma} dW_k, \quad (65)$$

mit dem Wiener-Prozess $W_k(t)$. Die Festlegung auf diesen Systemtyp geschah aus den im Kapitel „Sakaguchi-Ensembles“, Abschnitt „Motivation“ genannten Gründen.

Anzumerken ist, dass beide hier vorgestellten Methoden eine Zusammenfassung und Adaptierung einzelner und verschiedener Techniken aus [Ris96, Kapitel 11], [PRK03, Kapitel 9] und [Str67, Kapitel 9] sind. Bei der Vorstellung der zweiten Methode wird an einigen Stellen auf die Darstellung ausführlicher Zwischenschritte verzichtet, da diese in ähnlicher Art bereits im ersten Verfahren erfolgen und dort genauer erläutert werden.

Methode 1

Mit der Einführung der Phasen- und Frequenzdifferenzen

$$\psi(t) = \Theta(t) - \varphi_k(t) \quad \text{bzw.} \quad \nu(t) = \dot{\Theta}(t) - \omega_0 \quad (66)$$

schreibt sich bei folgender Unterdrückung des Oszillatorindex k das betrachtete System als

$$d\psi = (\nu - \varepsilon K \sin(\psi + \beta)) dt - \sqrt{2\Gamma} dW. \quad (67)$$

Diese stochastische Differentialgleichung sei im Stratonowitsch-Sinn interpretiert³⁸ mit dem Driftterm $\alpha(\psi) = \nu - \varepsilon K \sin(\psi + \beta)$ und der Diffusionskonstanten $\beta = \sqrt{2\Gamma}$. Nach

³⁸ Die Interpretation als Ito-Gleichung ist identisch wegen der Konstanz des Diffusionskoeffizienten.

Anhang, Abschnitt „Fokker-Planck-Gleichung“, Gleichung (A30) lässt sich im erwarteten stationären Fall für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\psi)$ folgende Beziehung angeben:

$$S = (\nu - \varepsilon K \sin(\psi + \beta)) p(\psi) - \Gamma p'(\psi). \quad (68)$$

Dabei bezeichnet S den konstanten Wahrscheinlichkeitsfluss von ψ .

Zur weiteren Betrachtung ist es sinnvoll, die Konstanten

$$D_\nu = \frac{\nu}{\Gamma} \quad \text{und} \quad D_K = \frac{\varepsilon K}{\Gamma} \quad (69)$$

zu setzen.³⁹ Des Weiteren sei mit

$$\Phi(\psi) = -D_\nu \psi - D_K \cos(\psi + \beta) \quad (70)$$

ein schief-periodisches (*tilted periodic*) Potential eingeführt, welches der Bedingung

$$\Phi(\psi \pm 2\pi) = \Phi(\psi) \mp 2\pi D_\nu \quad (71)$$

genügt. Damit kann Gleichung (68) als Bewegungsgleichung eines masselosen Teilchens aufgefasst werden, welche die Bewegung in diesem Potential beschreibt:

$$p'(\psi) = -\Phi'(\psi)p(\psi) - \frac{S}{\Gamma}. \quad (72)$$

Als allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung erhält man dann

$$p(\psi) = e^{-\Phi(\psi)} \left(e^{\Phi(\psi_0)} p(\psi_0) - \frac{S}{\Gamma} \int_{\psi_0}^{\psi} e^{\Phi(\psi')} d\psi' \right). \quad (73)$$

Fordert man nun die natürliche Randbedingung $p(\psi + 2\pi) = p(\psi)$ für Phasenvariablen, d. h. also insbesondere

$$p(\psi_0 + 2\pi) = e^{-\Phi(\psi_0)} e^{2\pi D_\nu} \left(e^{\Phi(\psi_0)} p(\psi_0) - \frac{S}{\Gamma} \int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} e^{\Phi(\psi)} d\psi \right) = p(\psi_0), \quad (75)$$

³⁹ Die hier angegebene Konstanz bezieht sich auf die Phasendifferenz ψ .

⁴⁰ [PRK03, Kapitel 9]

⁴¹ Die Lösung lässt sich über die Transformation $q(\psi) = e^{\Phi(\psi)} p(\psi)$ und damit

$$q'(\psi) = -\frac{S}{\Gamma} e^{\Phi(\psi)} \Rightarrow q(\psi) = q(\psi_0) - \frac{S}{\Gamma} \int_{\psi_0}^{\psi} e^{\Phi(\psi')} d\psi' \quad (74)$$

finden.

so lässt sich nach Umformung die erste Konstante des Problems mit

$$S = \Gamma \frac{e^{\Phi(\psi_0)} p(\psi_0)}{\int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} e^{\Phi(\psi)} d\psi} (1 - e^{-2\pi D_\nu}) \quad (76)$$

angeben.

Das Einsetzen dieser Konstante in die allgemeine Lösung (73) führt zu

$$p(\psi) = e^{-\Phi(\psi)} \frac{e^{\Phi(\psi_0)} p(\psi_0)}{\int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} e^{\Phi(\psi)} d\psi} \left(\int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} e^{\Phi(\psi)} d\psi - \int_{\psi_0}^{\psi} e^{\Phi(\psi')} d\psi' + e^{-2\pi D_\nu} \int_{\psi_0}^{\psi} e^{\Phi(\psi')} d\psi' \right). \quad (77)$$

Unter Benutzung der periodischen Eigenschaft (71) des Potentials Φ lässt sich obige große Klammer über

$$\int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} (\cdot) - \int_{\psi_0}^{\psi} (\cdot) + e^{-2\pi D_\nu} \int_{\psi_0}^{\psi} (\cdot) = \int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} (\cdot) - \int_{\psi_0}^{\psi} (\cdot) + \int_{\psi_0+2\pi}^{\psi+2\pi} (\cdot) = \int_{\psi}^{\psi+2\pi} (\cdot) \quad (78)$$

wesentlich vereinfachen. Damit lautet die allgemeine Lösung dann

$$p(\psi) = \frac{e^{\Phi(\psi_0)} p(\psi_0)}{\int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} e^{\Phi(\psi)} d\psi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} e^{\Phi(\psi') - \Phi(\psi)} d\psi' = p(\psi + 2\pi). \quad (79)$$

Deren strenge 2π -Periodizität ergibt sich nun auch aus den Eigenschaften des Potentials.⁴²

Fordert man letztlich die natürliche Normierung einer Wahrscheinlichkeitsdichte über eine Periode

$$\int_0^{2\pi} p(\psi) d\psi = 1, \quad (80)$$

liefert dies die zweite Konstante des Problems

$$\frac{1}{C} = \frac{\int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} e^{\Phi(\psi)} d\psi}{e^{\Phi(\psi_0)} p(\psi_0)} = \int_0^{2\pi} \int_{\psi}^{\psi+2\pi} e^{\Phi(\psi') - \Phi(\psi)} d\psi' d\psi \quad (81)$$

und beseitigt die ψ_0 -Abhängigkeit in Gleichung (76):

$$S = C \Gamma (1 - e^{-2\pi D_\nu}). \quad (82)$$

⁴² Gefordert war in Gleichung (75) ursprünglich lediglich $p(\psi_0) = p(\psi_0 + 2\pi)$.

Betrachtet man nun den Erwartungswert über alle Realisierungen von $\dot{\psi}$, so erhält man

$$\langle \dot{\psi} \rangle = \langle \nu - \varepsilon K \sin(\psi + \beta) \rangle = \int_0^{2\pi} (\nu - \varepsilon K \sin(\psi + \beta)) p(\psi) d\psi. \quad (83)$$

Durch Einsetzen von (72) mit $\Phi'(\psi) = -D_\nu + D_k \sin(\psi + \beta)$ wird dies gerade zu

$$\langle \dot{\psi} \rangle = \int_0^{2\pi} (S + \Gamma p'(\psi)) d\psi = 2\pi S. \quad (84)$$

Darstellung über Besselfunktion

Benutzt man die Potentialdefinition im Ausdruck der zweiten Konstanten (81), so erhält man

$$\frac{1}{C} = \int_0^{2\pi} \int_\psi^{\psi+2\pi} e^{-D_\nu(\psi' - \psi) - D_K(\cos(\psi' + \beta) - \cos(\psi + \beta))} d\psi' d\psi. \quad (85)$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Identität

$$\cos(\psi' + \beta) - \cos(\psi + \beta) = -2 \sin \frac{\psi' - \psi}{2} \sin \left(\frac{\psi' + \psi}{2} + \beta \right) \quad (86)$$

und nachfolgender Transformation $\chi = \psi' - \psi$ liefert dies

$$\frac{1}{C} = \int_0^{2\pi} e^{-D_\nu \chi} \int_0^{2\pi} e^{2D_K \sin \frac{\chi}{2} \sin(\frac{\chi}{2} + \psi + \beta)} d\psi d\chi. \quad (87)$$

Mit der modifizierten Besselfunktion erster Gattung⁴⁵ $I_0(x) = J_0(ix)$ ergibt sich daraus anschließend⁴⁶

$$\frac{1}{C} = 2\pi \int_0^{2\pi} e^{-D_\nu \chi} I_0 \left(2D_K \sin \frac{\chi}{2} \right) d\chi. \quad (89)$$

⁴³ Für die erste Relation wurde die Eigenschaft (A17) des Ito-Integrals genutzt. Da der Diffusionskoeffizient hier konstant ist, gilt diese auch für die hier benutzte Stratonowitsch-Interpretation.

⁴⁴ In der letzten Relation wurde erneut (72) benutzt.

⁴⁵ Die Besselfunktion erster Art ist in integraler Schreibweise gegeben über

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\tau - x \sin \tau)} d\tau. \quad (88)$$

⁴⁶ [Str67, Kapitel 9]

Das Einsetzen dieser Konstanten und (82) in Gleichung (84) liefert abschließend das Endergebnis für den Erwartungswert der Frequenzdifferenz:

$$\langle \dot{\psi} \rangle = \frac{\Gamma(1 - e^{-2\pi D_v})}{\int_0^{2\pi} e^{-D_v \chi} I_0(2D_K \sin \frac{\chi}{2}) d\chi}. \quad (90)$$

Leider muss diese Lösung zugleich verworfen werden, denn in ihr zeigt sich keine Abhängigkeit von der Phasenverschiebung β , was den experimentellen Ergebnissen widerspricht. Da die hier benutzten Methoden dennoch von Interesse für weitere Analysen sein könnten, wurden sie gleichwohl aufgeführt.

Darstellung als Kettenbruch

Stellt man als alternativen Ansatz die Wahrscheinlichkeitsdichte über die Fourierreihe

$$p(\psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{in\psi} \quad \Rightarrow \quad p'(\psi) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n p_n e^{in\psi} \quad (91)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$p_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\psi) e^{-in\psi} d\psi \quad (92)$$

dar, so gilt aus Normierungsgründen und wegen der Reelwertigkeit gerade

$$p_0 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{und} \quad p_{-n} = p_n^*. \quad (93)$$

Benutzt man des Weiteren die Darstellung

$$\sin(\psi + \beta) = \frac{1}{2i} (e^{i\beta} e^{i\psi} - e^{-i\beta} e^{-i\psi}) \quad (94)$$

und setzt diese zusammen mit (91) in die Bewegungsgleichung (72) ein, so erhält man

$$S = \left(\nu - \frac{\varepsilon K}{2i} (e^{i\beta} e^{i\psi} - e^{-i\beta} e^{-i\psi}) \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{in\psi} - i\Gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} n p_n e^{in\psi}. \quad (95)$$

Nach einer Indexverschiebung wird dies zu

$$S = \nu \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n e^{in\psi} - i\Gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} n p_n e^{in\psi} - \frac{\varepsilon K}{2i} \left(e^{i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{n-1} e^{in\psi} - e^{-i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{n+1} e^{in\psi} \right), \quad (96)$$

was auch als unendliches Differenzgleichungssystem aufgefasst werden kann:⁴⁷

$$S\delta_{n,0} = (\nu - in\Gamma) p_n - \frac{\varepsilon K}{2i} (e^{i\beta} p_{n-1} - e^{-i\beta} p_{n+1}). \quad (97)$$

Die Betrachtung der Indizes $n \neq 0$ liefert daraus das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fourierkoeffizienten:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{e^{i\beta}}{\frac{2i}{\varepsilon K} (\nu - in\Gamma) + e^{-i\beta} \frac{p_{n+1}}{p_n}}, \quad (98)$$

mittels welchem sich die erste Harmonische als schnell konvergierender Kettenbruch darstellen lässt:

$$p_1 = \frac{e^{i\beta}}{2\pi} \frac{1}{\frac{2i}{\varepsilon K} (\nu - i\Gamma) + \frac{1}{\frac{2i}{\varepsilon K} (\nu - 2i\Gamma) + \frac{1}{\frac{2i}{\varepsilon K} (\nu - 3i\Gamma) + \dots}}}. \quad (99)$$

Damit und mit $p_0 = 1/2\pi$ ließe sich nun die Lösung $p(\psi)$ gut in erster Ordnung approximieren. Für den Nullindex $n = 0$ erhält man zusätzlich die Beziehung

$$S = \frac{\nu}{2\pi} - \frac{\varepsilon K}{2i} (e^{i\beta} p_{-1} - e^{-i\beta} p_1) = \frac{\nu}{2\pi} + \varepsilon K \operatorname{Im}(e^{-i\beta} p_1), \quad (100)$$

welche mit (84) gerade zu einer weiteren Darstellung des Erwartungswertes der Frequenzdifferenz führt:

$$\langle \psi \rangle = \nu + 2\pi\varepsilon K \operatorname{Im}(e^{-i\beta} p_1). \quad (101)$$

Doch auch hier muss leider festgestellt werden, dass in diesem Ausdruck ebenso keine Abhängigkeit von der Phasenverschiebung β vorhanden ist. Wie zuvor seien diese Analyseschritte dennoch hier aufgeführt. Auch bei genauer Prüfung konnte hier leider nicht herausgefunden werden, in welchem der obigen Schritte diese Abhängigkeit verlorengeht.

Methode 2

Mittels der hier dargestellten alternativen Methode soll versucht werden, unter expliziter Beibehaltung einer β -Abhängigkeit Einblick in die Verteilungsfunktionen der mittleren

⁴⁷ [PRK03, Kapitel 9]

Oszillatorfrequenzen $\dot{\varphi}_k$ zu gewinnen.

Ausgehend von der ausführlichen Formulierung der stochastischen Stratonowitsch-Differentialgleichung in (65)

$$d\varphi_k = \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_k + \beta) \right) dt + \sqrt{2\Gamma} dW_k \quad (102)$$

kann im stationären Fall für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\varphi_k)$ die folgende Fokker-Planck-Gleichung angegeben werden:

$$S = \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_k + \beta) \right) p(\varphi_k) - \Gamma p'(\varphi_k). \quad (103)$$

Unter Benutzung von

$$\int \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_k + \beta) d\varphi_k = \int \sin \beta d\varphi_k + \int \sum_{j \neq k}^N \sin(\varphi_j - \varphi_k + \beta) d\varphi_k \quad (104)$$

und

$$\sum_{j \neq k}^N \cos(\varphi_j - \varphi_k + \beta) = \sum_{j=1}^N \cos(\varphi_j - \varphi_k + \beta) - \cos \beta \quad (105)$$

sei bei Unterdrückung des Oszillatorindex k mit

$$\Phi(\varphi) = -\frac{\varphi}{\Gamma} \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta \right) - \frac{\varepsilon}{N\Gamma} \sum_{j=1}^N \cos(\varphi_j - \varphi + \beta) + \frac{\varepsilon}{N\Gamma} \cos \beta \quad (106)$$

ein Potential eingeführt. Dieses Potential ist 2π -schief-periodisch (*tilted periodic*)

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) - \frac{2\pi}{\Gamma} \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta \right) \quad (107)$$

und führt zur Darstellung von (103) als Bewegungsgleichung eines masselosen Teilchens:

$$p'(\varphi) = -\Phi'(\varphi)p(\varphi) - \frac{S}{\Gamma}. \quad (108)$$

Dessen allgemeine Lösung erfolgt analog zu oben (s. Fußnote 41) und lautet

$$p(\varphi) = e^{-\Phi(\varphi)} \left(e^{\Phi(\varphi_0)} p(\varphi_0) - \frac{S}{\Gamma} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{\Phi(\varphi')} d\varphi' \right). \quad (109)$$

Die Forderung nach periodischer Randbedingung $p(\varphi) = p(\varphi + 2\pi)$, insbesondere also

$$p(\varphi_0 + 2\pi) = e^{-\Phi(\varphi_0)} e^{\frac{2\pi}{T}(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)} \left(e^{\Phi(\varphi_0)} p(\varphi_0) - \frac{S}{\Gamma} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{\Phi(\varphi)} d\varphi \right) = p(\varphi_0) \quad (110)$$

führt zur Festlegung der ersten Konstante des Problems:

$$S = C\Gamma \left(1 - e^{-\frac{2\pi}{T}(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)} \right) \quad \text{mit} \quad C = \frac{e^{\Phi(\varphi_0)} p(\varphi_0)}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{\Phi(\varphi)} d\varphi}. \quad (111)$$

Das Einsetzen in die Lösung (109) liefert hierauf

$$p(\varphi) = e^{-\Phi(\varphi)} C \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{\Phi(\varphi)} d\varphi - \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{\Phi(\varphi')} d\varphi' + e^{-\frac{2\pi}{T}(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{\Phi(\varphi')} d\varphi' \right), \quad (112)$$

was unter Benutzung der Periodizität des Potentials

$$e^{-\frac{2\pi}{T}(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{\Phi(\varphi')} d\varphi' = \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{\Phi(\varphi'+2\pi)} d\varphi' = \int_{\varphi_0+2\pi}^{\varphi+2\pi} e^{\Phi(\varphi')} d\varphi' \quad (113)$$

und anschließender Zusammenfassung der beteiligten Integrale (analog zu Gleichung (78)) vereinfacht werden kann zu

$$p(\varphi) = C \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} e^{\Phi(\varphi') - \Phi(\varphi)} d\varphi' = p(\varphi + 2\pi). \quad (114)$$

Die abschließende Forderung nach der Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte über eine Periode

$$\int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi = 1 \quad (115)$$

liefert einen Ausdruck für die zweite Konstante und die Unabhängigkeit von der Integrationskonstanten φ_0 :

$$\frac{1}{C} = \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} e^{\Phi(\varphi)} d\varphi}{e^{\Phi(\varphi_0)} p(\varphi_0)} = \int_0^{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} e^{\Phi(\varphi') - \Phi(\varphi)} d\varphi' d\varphi. \quad (116)$$

Betrachtet man nun den Erwartungswert aller Realisierungen von $\hat{\varphi}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \langle \hat{\varphi} \rangle &= \left\langle \omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi + \beta) \right\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi + \beta) \right) p(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (117)$$

was sich unter Benutzung von (108) und

$$\Phi'(\varphi) = -\frac{1}{\Gamma} \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta \right) - \frac{\varepsilon}{N\Gamma} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi + \beta) \quad (118)$$

vereinfachen lässt zu

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \int_0^{2\pi} (S + \Gamma p'(\varphi)) d\varphi = 2\pi S. \quad (119)$$

Ähnlich dem obigen Vorgehen sei dieser Erwartungswert nun ausgedrückt durch eine Besselfunktion erster Art. Betrachtet man dazu

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi') - \Phi(\varphi) &= -\frac{\varphi' - \varphi}{\Gamma} \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta \right) \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{N\Gamma} \sum_{l=1}^N (\cos(\varphi_l - \varphi' + \beta) - \cos(\varphi_l - \varphi + \beta)) \end{aligned} \quad (120)$$

und benutzt die trigonometrische Identität

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (121)$$

so erhält man

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi') - \Phi(\varphi) &= -\frac{\varphi' - \varphi}{\Gamma} \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta \right) \\ &\quad - \frac{2\varepsilon}{N\Gamma} \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \sum_{j=1}^N \sin \left(\varphi_j - \frac{\varphi' + \varphi}{2} + \beta \right). \end{aligned} \quad (122)$$

Damit und mit der Transformation $\chi = \varphi' - \varphi$ lautet das Normierungsintegral (116)

$$\frac{1}{C} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left(-\frac{\chi}{\Gamma} \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta \right) - \frac{2\varepsilon}{N\Gamma} \sin \frac{\chi}{2} \sum_{j=1}^N \sin \left(\varphi_j - \varphi + \frac{\chi}{2} + \beta \right) \right) d\chi d\varphi, \quad (123)$$

was durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge übergeht in

$$\frac{1}{C} = \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\chi}{\Gamma} (\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)} \int_0^{2\pi} \exp \left(-\frac{2\varepsilon}{N\Gamma} \sin \frac{\chi}{2} \sum_{j=1}^N \sin \left(\varphi_j - \varphi - \frac{\chi}{2} + \beta \right) \right) d\varphi d\chi. \quad (124)$$

Die anschließende Benutzung der Definition des Mittelfelds

$$K e^{i\Theta} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\varphi_j} \quad (125)$$

und

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin\left(\varphi_j - \varphi - \frac{\chi}{2} + \beta\right) = K \sin\left(\Theta - \varphi - \frac{\chi}{2} + \beta\right) \quad (126)$$

führen dann zu

$$\frac{1}{C} = \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\chi}{T}(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{2\varepsilon K}{T} \sin \frac{\chi}{2}} \sin\left(\Theta - \varphi - \frac{\chi}{2} + \beta\right) d\varphi d\chi. \quad (127)$$

Abschließend lässt sich das innere Integral als Besselfunktion erster Art mit $I_0(x) = J_0(ix)$ beschreiben (s. Fußnote 45), d. h.

$$\frac{1}{C} = 2\pi \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\chi}{T}(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)} I_0\left(\frac{2\varepsilon K}{T} \sin \frac{\chi}{2}\right) d\chi. \quad (128)$$

Betrachtet man nun mit dieser Konstanten erneut den Erwartungswert in Gleichung (119), so erhält man mit (111)

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \frac{\Gamma\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{T}(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)}\right)}{\int_0^{2\pi} e^{-\frac{\chi}{T}(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)} I_0\left(\frac{2\varepsilon K}{T} \sin \frac{\chi}{2}\right) d\chi}. \quad (129)$$

Mittels trigonometrischer Eigenschaften und Beschaffenheit der benutzten Besselfunktion vereinfacht sich dies letztlich zu

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = 2\Gamma\left(\int_0^{2\pi} e^{-\frac{\chi}{T}(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{N} \sin \beta)} I_0\left(\frac{2\varepsilon K}{T} \sin \frac{\chi}{2}\right) d\chi\right)^{-1}. \quad (130)$$

Eine weitere Analyse dieses Ausdrucks wurde hier ausgespart, um den Rahmen der vorliegenden Arbeit in angemessener Größe zu halten. Es zeigt sich jedoch, dass dieses hier vorgeschlagene Verfahren die explizite β -Abhängigkeit erhält und somit zumindest für die Oszillatorfrequenzen $\dot{\varphi}$ eine analytische Betrachtung ermöglicht. Ob erstere auch bei einer analogen Anwendung auf die Mittelfeldfrequenz $\dot{\Theta}$ bzw. der Frequenzdifferenz $\dot{\Theta} - \dot{\varphi}$ erhalten bleibt, wäre zukünftig zu zeigen.

Diese Seite ist absichtlich ohne Inhalt.

Anhang

Stochastische Differentialgleichungen

Wiener-Prozess

Eine zentrale Rolle beim Studium stochastischer Differentialgleichungen (SDE, *stochastic differential equations*) spielen stochastische Prozesse. Ein stochastischer Prozess X sei hier die Familie von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $t \in \mathbb{R}_+$.⁴⁸ Für fixe $\omega \in \Omega$ bezeichnen $X_t = X_t(\omega)$ die möglichen Realisierungspfade des Prozesses.

Ein besonderer stochastischer Prozess ist der (Standard-)Wiener-Prozess W (benannt nach N. WIENER) mit den folgenden, definierenden Eigenschaften:

- 1) Der Startwert beträgt fast sicher $W_0 = 0$.⁴⁹
- 2) Die Zuwächse $W_{t+u} - W_t$ sind für alle $u > 0$ stochastisch unabhängig.
- 3) Die Zuwächse sind normalverteilt mit $W_{t+u} - W_t \sim \mathcal{N}(0, u)$.⁵⁰
- 4) Die Realisierungspfade W_t sind fast sicher stetig.⁵¹

Ein wesentliches Merkmal des Wiener-Prozesses ist dessen Nichtdifferenzierbarkeit:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \left| \frac{W_{t+b} - W_t}{b} \right| = \infty \quad (\text{a. s.})^{52} \quad (\text{A1})$$

Gerade diese Tatsache, dass sämtliche Realisierungspfade nirgends differenzierbar sind, verdeutlicht die Notwendigkeit der folgenden gesonderten Behandlung stochastischer Differentialgleichungen. Darüber hinaus besitzt der Wiener-Prozess unbeschränkte Variation. Das heißt, mit allen möglichen Partitionen $\tau : 0 = t_0 < \dots < t_n = T$ eines beliebigen

⁴⁸ Die genaue Beschaffenheit des Wahrscheinlichkeitsraums (Ω, Σ, P) mit der Ergebnismenge Ω , der σ -Algebra Σ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß P ist an dieser Stelle nicht von Bedeutung.

⁴⁹ Der Terminus *fast sicher* bedeutet, dass das Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit Eins eintritt. Im Folgenden wird dies, wenn unklar, auch durch den Zusatz (a. s.) (*almost surely*) angezeigt.

⁵⁰ Die Notation $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ bezeichnet die Normalverteilung mit dem Mittelwert μ und der Varianz σ^2 .

⁵¹ Die Stetigkeit folgt hier auch aus dem Satz von Kolmogorow und Tschenzow (*Kolmogorov continuity theorem*).

⁵² Ein Nachweis darüber findet sich u. a. in [Gar04, Kapitel 3] und [Mik98, Anhang A3].

Intervalls $[0, T]$ gilt

$$\sup_{\tau} \sum_{i=1}^n |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| = \infty \quad (\text{a. s.})^{53} \quad (\text{A2})$$

Auch hierin offenbart sich die bereits genannte Erfordernis einer separaten Untersuchung.

Langevin-Gleichung

Trotz seiner physikalisch etwas pathologisch anmutenden Eigenart stellt der Wiener-Prozess die Grundlage der Beschreibung real existierender Phänomene dar, insbesondere der brownischen (Molekular-)Bewegung (benannt nach R. BROWN). Die Theorie der brownischen Bewegung begründet und charakterisiert die unregelmäßige und ruckartige Bewegungsform gelöster, mesoskopischer Teilchen.

Als Bewegungsgesetz formuliert, stellt sich diese für ein Teilchen der Masse m dar als konventionelle Langevin-Gleichung

$$m\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x}(t) + \xi(t), \quad (\text{A3})$$

mit dem Reibungskoeffizienten γ und einer zufällig, rapide fluktuierenden Kraft $\xi(t)$, welche die molekularen Kollisionen modelliert.⁵⁴ Dabei wird für die Fluktuationkraft angenommen, dass sie den Erwartungswert Null annimmt und gänzlich unkorreliert ist:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(u) \rangle \sim \delta(t - u).^{55} \quad (\text{A5})$$

Aufgrund dieser Eigenschaften beschreibt die Kraft $\xi(t)$ faktisch ein weißes Rauschen (*white noise*). Im Allgemeinen fordert man zusätzlich, physikalisch sinnvoll, dass die Fluktuationen normalverteilt seien und erhält damit ein gaußsches weißes Rauschen (*gaussian white noise*).

Tatsächlich stellen diese Anforderungen an die fluktuierende Kraft $\xi(t)$ eine wesentliche

⁵³ Die Gültigkeit dieser Aussage wird u. a. in [Mik98, Anhang A3] nachgewiesen.

⁵⁴ Die ursprüngliche Formulierung nach P. LANGEVIN (s. [Lan08], übersetzt in [LG97]) lautet

$$m\ddot{x}(t) = -6\pi\mu a\dot{x}(t) + X, \quad (\text{A4})$$

mit den hier unerheblichen Konstanten μ und a . Der Autor beschreibt die Wirkung der Kraft X weiterhin u. a. als sowohl anziehend als auch abstoßend. Daraus folgernd, setzt er für den Erwartungswert $\langle Xx \rangle = 0$ an.

⁵⁵ Die Notation $\langle \xi(t) \rangle$ bezeichnet hierbei den Erwartungswert und $\langle \xi(t)\xi(u) \rangle$ die Autokorrelation von $\xi(t)$. Mit $\delta(\cdot)$ ist die Delta-Distribution bezeichnet.

Verknüpfung zum o. g. Wiener-Prozess dar und es gilt

$$\int_0^t \xi(s) ds = W_t \quad \text{bzw.} \quad \xi(t) = \frac{d}{dt} W_t. \quad (A6)$$

Das Problem dieser Beziehung ist jedoch, dass die rechte Zeitableitung so nicht existiert. Folglich muss die Gleichung als Integralgleichung interpretiert werden:

$$\xi(t) dt = dW_t, \quad (A7)$$

wobei über das benötigte Integral im Weiteren noch befunden werden muss.

In ihrer allgemeinen Form wird die Langevin-Gleichung heute geschrieben als

$$\dot{x}(t) = a(x(t), t) + b(x(t), t)\xi(t), \quad (A8)$$

mit den Drift- und Diffusionskoeffizienten $a(x(t), t)$ und $b(x(t), t)$. In integraler Schreibweise und unter Benutzung der Notation stochastischer Prozesse lautet sie

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t. \quad (A9)$$

In dieser allgemeinen Form behandelt sie gerade den Fall dominierender Reibung (*high-friction case*) unter Vernachlässigung des Trägheitsterms $m\ddot{x}(t)$ in Gleichung (A3).^{57,58}

Ito-Integral

Für die weitere Behandlung stochastischer Differentialgleichungen ist es vorerst hilfreich, das allgemeine formale Integral

$$\int_{t_0}^t G(s) dW_s \quad (A10)$$

mit einer beliebigen zeitabhängigen Funktion $G(t)$ und dem Wiener-Prozess W_t zu untersuchen. Da das Maß dW_t wie oben beschrieben in dieser Form nicht existiert, ist die Interpretation als Lebesgue-Integral hier leider nicht möglich. Weiterhin wäre die alternative Interpretation desselben als Riemann-Stieltjes-Integral mit sehr starken Anforderungen an

⁵⁶ Ein Nachweis darüber findet sich u. a. in [Gar04, Kapitel 4]

⁵⁷ [Ris96, Kapitel 11]

⁵⁸ Dies kann alternativ auch als (stochastische) Bewegungsgleichung masseloser Teilchen angesehen werden.

die Funktion $G(t)$ verbunden, was in Anbetracht ihrer gewünschten Allgemeinheit ebenfalls nicht zielführend ist.⁵⁹

Betrachtet man eine beliebige $(n + 1)$ -elementige Partitionierung des Intervalls $[t_0, t]$

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = t \quad (\text{A11})$$

mit den Zwischenschritten τ_i

$$t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i, \quad (\text{A12})$$

dann lässt sich obiges Integral jedoch als Grenzwert der Partialsummen

$$S_n = \sum_{i=1}^n G(\tau_i) (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (\text{A13})$$

definieren.⁶⁰ Diese Definition hängt im Wesentlichen lediglich von der Wahl der Zwischenschritte τ_i ab. Das nach K. ITO benannte Ito-Integral benutzt für diese die linksseitigen Werte

$$\tau_i = t_{i-1} \quad (\text{A14})$$

als Spezialfall $\alpha = 0$ der allgemeineren Form

$$\tau_i = \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (\text{A15})$$

Dieses so festgelegte Integral ist wohldefiniert und fordert von der Funktion $G(t)$ zusätzlich lediglich, dass diese nichtantizipierend (*nonanticipating*) sei. Letzteres bedeutet im Allgemeinen, dass der Funktionswert $G(t)$ stochastisch unabhängig von allen Funktionswerten zu späteren Zeitpunkten $t + s$ ist.

Aus der obigen Definition ergibt sich eine wesentliche Eigenschaft des stochastischen (Ito-)Integrals: dW_t ist von halber Ordnung in der Zeit und sämtliche höhere Ordnungen verschwinden

$$dW_t^2 = dt \quad \text{und} \quad dW_t^{2+N} = 0, \quad N > 0. \quad (\text{A16})$$

⁵⁹ In [Mik98, Kapitel 2] werden diese Anforderungen u. a. genauer ausgeführt.

⁶⁰ Der angeführte Grenzwert existiert im Sinne einer Konvergenz im quadratischen Mittel (*limit in mean square*).

Des Weiteren gilt für den Erwartungswert einer Funktion $G(t)$

$$\left\langle \int_{t_0}^t G(s) dW_s \right\rangle = 0, \quad (\text{A17})$$

sowie für die Korrelation mit einer zweiten Funktion $H(t)$

$$\left\langle \int_{t_0}^t G(s) dW_s \int_{t_0}^t H(s) dW_s \right\rangle = \int_{t_0}^t \langle G(s)H(s) \rangle ds. \quad (\text{A18})$$

Für das Ito-Integral gilt im Allgemeinen nicht die Kettenregel der Differentiation: Sei

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t \quad (\text{A19})$$

und $Y_t = f(X_t, t)$ eine beliebige Transformation. Dann gilt

$$\begin{aligned} dY_t = & \left(a(X_t, t) \frac{\partial}{\partial X_t} f(X_t, t) + \frac{1}{2} b(X_t, t)^2 \frac{\partial^2}{\partial X_t^2} f(X_t, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(X_t, t) \right) dt \\ & + b(X_t, t) \frac{\partial}{\partial X_t} f(X_t, t) dW_t. \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

Diese Gleichung ist auch als Ito-Formel bekannt.

Stratonowitsch-Interpretation

Einer anderen, nach R. STRATONOWITSCH benannten Interpretation folgend lässt sich auch über den Grenzwert der Partialsumme

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (X_{t_i} + X_{t_{i-1}}) (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (\text{A21})$$

eine wohldefinierte Festlegung für das Integral

$$\int_{t_0}^t X_s dW_s \quad (\text{A22})$$

geben.⁶³ Diese Definition führt zu einem nicht unwesentlichen Vorteil gegenüber dem Ito-Integral: Es gilt weiterhin die Kettenregel der gewöhnlichen Differential- und Integralrechnung.

⁶¹ Sämtliche Nachweise der hier folgenden Ausführungen finden sich u. a. in [Gar04, Kapite 4].

⁶² Diese Beziehung folgt direkt aus der Taylorentwicklung von Y_t und der Anwendung von (A16).

⁶³ Der angeführte Grenzwert existiert auch hier im Sinne einer Konvergenz im quadratischen Mittel.

Sei

$$dX_t = \alpha(X_t, t) dt + \beta(X_t, t) dW_t, \quad (\text{A23})$$

eine stochastische Stratonowitsch-Differentialgleichung. Dann lassen sich deren Drift- und Diffusionskoeffizienten zwischen der Ito- und Stratonowitsch-Interpretation umformen über

$$\alpha(X_t, t) = a(X_t, t) - \frac{1}{2} b(X_t, t) \frac{\partial}{\partial X_t} b(X_t, t) \quad \text{und} \quad \beta(X_t, t) = b(X_t, t). \quad (\text{A24})$$

Fokker-Planck-Gleichung

Für die Untersuchung einer allgemeinen stochastischen Differentialgleichung in Ito-Interpretation

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t, \quad (\text{A25})$$

mit den Drift- und Diffusionstermen $a(X_t, t)$ und $b(X_t, t)$, sowie dem Wiener-Prozess W_t , ist es oftmals leichter, statt einer expliziten Lösung X_t , deren Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(X_t, t)$ anzugeben. Letztere kann über die sogenannte Fokker-Planck-Gleichung (*Fokker-Planck equation*, FPE) berechnet werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(X_t, t) = -\frac{\partial}{\partial X_t} (a(X_t, t) p(X_t, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X_t^2} (b(X_t, t)^2 p(X_t, t)).^{64} \quad (\text{A26})$$

Mit der Einführung des Wahrscheinlichkeitsflusses

$$S(X_t, t) = a(X_t, t) p(X_t, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_t} (b(X_t, t)^2 p(X_t, t)) \quad (\text{A27})$$

kann diese Gleichung als Kontinuitätsgleichung geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(X_t, t) + \frac{\partial}{\partial X_t} S(X_t, t) = 0. \quad (\text{A28})$$

Eine wesentliche Vereinfachung des obigen Problems erhält man, wenn man von zeitunabhängigen Drift- und Diffusionstermen $a(X_t)$ und $b(X_t)$ ausgeht, sowie den stationären Fall mit zeitlich konstanter Wahrscheinlichkeitsverteilung annimmt. Unter diesen Bedingungen muss wegen (A27) und (A28) auch der Wahrscheinlichkeitsfluss zeitunabhängig und konstant sein:

$$S = a(X_t) p(X_t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dX_t} (b(X_t)^2 p(X_t)). \quad (\text{A29})$$

⁶⁴ [Ris96, Kapitel 4]

Übertragen auf die Stratonowitsch-Interpretation lautet dieser dann

$$S = \left(\alpha(X_t) + \frac{1}{2} \beta(X_t) \beta'(X_t) \right) p(X_t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dX_t} (\beta(X_t)^2 p(X_t)). \quad (\text{A30})$$

Sofern $\beta = b$ konstant sind, sind wegen (A24) beide Beziehungen identisch und brauchen nicht gesondert betrachtet werden.

Numerische Integration

Deterministische Verfahren

Für die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen (*ordinary differential equations*, ODE) sind seit langer Zeit eine große Anzahl an Verfahren bekannt. Zwei einfache solche Methoden, welche in der vorliegenden Arbeit Verwendung fanden, seien hier kurz vorgestellt.

Betrachtet man das N -dimensionale Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^N, \quad (\text{A31})$$

so versucht im Allgemeinen jedes numerische Integrationsverfahren durch eine geeignete Wahl diskreter Zeitschritte $t_n \leq t_0$ und einer optimalen Bestimmung der Zuwächse $\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n$, dessen Lösung durch die Folge (\vec{x}_n) zu approximieren.⁶⁵ Die Qualität dieser Approximation hängt bei Verfahren mit konstanter Schrittweite $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ wesentlich von der Wahl der Größe Δt ab.

Als einfachste einer solchen Methode gilt das explizite Euler-Verfahren. Für dieses werden die diskreten Zeitschritte über

$$t_n = t_0 + n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A32})$$

festgelegt. Die Annäherung an die exakte Lösung erfolgt dann mittels

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta t \vec{f}(\vec{x}_n, t_n). \quad (\text{A33})$$

Die Konvergenzordnung dieser Methode beträgt Eins.

⁶⁵ Die Notation \vec{x}_n bezeichnet hier die Approximation des Funktionswertes von \vec{x} der Stelle t_n .

Die als Heun-Verfahren oder verbessertes Euler-Verfahren bekannte Methode zweiter Ordnung benutzt bei ebenfalls konstanter Schrittweite Δt dieselben diskreten Zeitschritte wie in Gleichung (A32). Der approximative Fortschritt wird jedoch über den Zwischenwert

$$\vec{x}'_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta t \vec{f}(\vec{x}_n, t_n) \quad (\text{A34})$$

und anschließender Bestimmung von

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_k + \frac{\Delta t}{2} \left(\vec{f}(\vec{x}_n, t_n) + \vec{f}(\vec{x}'_{n+1}, t_{n+1}) \right) \quad (\text{A35})$$

realisiert. Diese Methode gehört zur Klasse der Runge-Kutta-Verfahren.

Stochastische Verfahren

Zu den einfachsten Methoden der numerischen Integration stochastischer Differentialgleichungen zählt das Euler-Maruyama-Verfahren. Ausgehend von der generellen Form einer stochastischen Differentialgleichung in Ito-Gestalt

$$dX_t = a(X_t, t) dt + b(X_t, t) dW_t \quad (\text{A36})$$

werden wie bei den beiden o. g. genannten Verfahren zunächst diskrete Zeitschritte nach Gleichung (A32) festgelegt. Des Weiteren werden die Zuwächse dW_t durch normal verteilte Zufallswerte ΔW_n mit Erwartungswert Null und Varianz Δt realisiert.⁶⁶ Anschließend ist mit

$$X_{n+1} = X_n + a(X_n, t_n)\Delta t + b(X_n, t_n)\Delta W_n \quad (\text{A37})$$

die Approximation der Lösung gegeben. Die Konvergenzgeschwindigkeit dieses Verfahrens ist von halber Ordnung.⁶⁷

Ein weiteres Integrationsverfahren halber Ordnung für stochastische Differentialgleichungen, welche jedoch im Stratonowitsch-Sinn formuliert sind, ist das stochastische Euler-Heun-Verfahren. Ausgehend von der Stratonowitsch-SDE

$$dX_t = \alpha(X_t, t) dt + \beta(X_t, t) dW_t \quad (\text{A38})$$

⁶⁶ Der zeitliche Index t von dW_t ist hier durch den Diskretisierungsindex n des Zeitschrittes t_n ersetzt.

⁶⁷ [KP92, Kapitel 9]

wird zunächst der Zwischenwert

$$X'_{n+1} = X_n + \alpha(X_n, t_n)\Delta t + \beta(X_n, t_n)\Delta W_n \quad (\text{A39})$$

berechnet. Dabei sind die Werte Δt und ΔW_n wie im vorherigen Verfahren zu bestimmen. Anschließend erfolgt über

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{2}(\alpha(X_n, t_n) + \alpha(X'_{n+1}, t_{n+1}))\Delta t + \frac{1}{2}(\beta(X_n, t_n) + \beta(X'_{n+1}, t_{n+1}))\Delta W_n \quad (\text{A40})$$

die Approximation der Lösung.

Software

Die Simulation der in dieser Arbeit beschriebenen dynamischen Systeme deterministischer und stochastischer Art erfolgte computergestützt numerisch. Dazu wurde ein Softwareprojekt⁶⁸ realisiert, welches den folgenden Anforderungen genügt:

- 1) Beschreibung der Systeme und experimentellen Bedingungen durch generische Konfigurationsdateien zur jederzeitigen Reproduktion aller Simulationen.
- 2) Effiziente Berechnung der Integration und aller Transformationen auf der Grafikkhardware.
- 3) Hierarchische und komprimierte Datenspeicherung zur zugriffsschnellen Auswertung auch großer Datenmengen.

Das Projekt wurde in C++11 implementiert. Als Konfigurationsmodul kam die freie Bibliothek *libconfig*⁶⁹ zum Einsatz. Diese ermöglichte das einfache Parsen strukturierter Konfigurationsdateien im Textformat. Für die mathematischen Berechnungen auf der Grafikkhardware (GPGPU, *general-purpose computing in graphics processing units*) diente die Plattform CUDA/*Thrust*⁷⁰ in ihren aktuellen Versionen 7.5 (CUDA) und 1.8 (*Thrust*). Als Datenmodell wurde die C++-Implementierung des freien HDF-Formats⁷¹ (*hierarchical data format*) in seiner

⁶⁸ URL: <https://github.com/murtex/enosc>

⁶⁹ URL: <http://www.hyperrealm.com/libconfig/>

⁷⁰ URL: <https://docs.nvidia.com/cuda/thrust/index.html>

⁷¹ URL: <https://www.hdfgroup.org/>

letzten Version 5 benutzt.

Sämtliche Simulationen wurden auf einer AMD A10-5700 APU mit vier Kernen zu je 3.4 GHz betrieben. Als Grafikkarte kam eine NVIDIA GeForce GTX 650 (GK107) mit 1 GB Speicher zum Einsatz. Gegenüber einer Berechnung ohne Einsatz von Grafikkarte kam diese Konfiguration auf eine Geschwindigkeitsverbesserung um den Faktor 70. Die chaotischen Rössler-Ensembles wurden über je 51 ε - und β -Werte und einer Oszillatoranzahl von $N = 256$ simuliert, was eine Gesamtdimension des dynamischen Systems von etwa $M \approx 2 \cdot 10^6$ entspricht. Für die stochastischen Ensembles wurden wegen ihrer numerisch komplexeren Art lediglich je 41 Werte simuliert. Als Integrationsmethode kam für alle Ensembles das deterministische bzw. stochastische Heun-Verfahren mit einer konstanten Schrittweite von $\Delta t = 0.04$ zur Anwendung.

Bibliografie

- [BJPS09] A. BALANOV, N. JANSON, D. POTSNOV und O. SOSNOVTSEVA. *Synchronization. From Simple to Complex*. Springer Series in Synergetics. Springer Berlin Heidelberg, 2009. DOI: [10.1007/978-3-540-72128-4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-72128-4).
- [BRZP10] Y. BAIBALATOV, M. ROSENBLUM, Z. ZHANABAEV und A. PIKOVSKY. “Complex dynamics of an oscillator ensemble with uniformly distributed natural frequencies and global nonlinear coupling”. In: *Physical Review E* 82 (1 2010). American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevE.82.016212](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.016212).
- [CKW04] W. COFFEY, Y. KALMYKOV und J. WALDRON. *The Langevin Equation. With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering*. World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics 14. World Scientific Publishing, 2004. DOI: [10.1142/5343](https://doi.org/10.1142/5343).
- [Gar04] C. GARDINER. *Handbook of Stochastic Methods, for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer Series in Synergetics. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [Jac10] K. JACOBS. *Stochastic Processes for Physicists. Understanding Noisy Systems*. Cambridge University Press, 2010. DOI: [10.1017/CBO9780511815980](https://doi.org/10.1017/CBO9780511815980).
- [Kam07] N. VAN KAMPEN. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North Holland, 2007.
- [KCRPM08] B. KRALEMANN, L. CIMPONERIU, M. ROSENBLUM, A. PIKOVSKY und R. MROWKA. “Phase dynamics of coupled oscillators reconstructed from data”. In: *Physical Review E* 77 (6 2008). American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevE.77.066205](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.066205).
- [KP92] P. KLOEDEN und E. PLATEN. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Applications of Mathematics 23. Springer Berlin Heidelberg, 1992. DOI: [10.1007/978-3-662-12616-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5).
- [Kur84] Y. KURAMOTO. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer Series in Synergetics 19. Springer Berlin Heidelberg, 1984. DOI: [10.1007/978-3-642-69689-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3).

- [Lan08] P. LANGEVIN. « Sur la théorie du mouvement brownien ». In: *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 146 (1 1908). Hrsg. von ACADÉMIE DES SCIENCES (FRANCE). Gauthier-Villars (Paris).
- [LG97] D. LEMONS und A. GYTHIEL. “Paul Langevin’s 1908 paper ‘On the Theory of Brownian Motion’”. In: *American Journal of Physics* 65 (11 1997). American Association of Physics Teachers. DOI: [10.1119/1.18725](https://doi.org/10.1119/1.18725).
- [Mik98] T. MIKOSCH. *Elementary Stochastic Calculus, with Finance in View*. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability 6. World Scientific Publishing, 1998. DOI: [10.1142/3856](https://doi.org/10.1142/3856).
- [MMP02] E. MOSEKILDE, Y. MAISTRENKO und D. POSTNOV. *Chaotic Synchronization. Applications to Living Systems*. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A 42. World Scientific Publishing, 2002. DOI: [10.1142/4845](https://doi.org/10.1142/4845).
- [Øks03] B. ØKSENDAL. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2003. DOI: [10.1007/978-3-642-14394-6](https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6).
- [PR03] A. PIKOVSKY und M. ROSENBLUM. “Phase Synchronization of Regular and Chaotic Self-Sustained Oscillators”. In: *Synchronization: Theory and Application*. Hrsg. von A. PIKOVSKY und Y. MAISTRENKO. NATO Science Series 109. Springer Netherlands, 2003. DOI: [10.1007/978-94-010-0217-2_9](https://doi.org/10.1007/978-94-010-0217-2_9).
- [PRK03] A. PIKOVSKY, M. ROSENBLUM und J. KURTHS. *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series 12. Cambridge University Press, 2003. DOI: [10.1017/cbo9780511755743](https://doi.org/10.1017/cbo9780511755743).
- [PRZK99] A. PIKOVSKY, M. ROSENBLUM, M. ZAKS und J. KURTHS. “Phase Synchronization of Regular and Chaotic oscillators”. In: *Handbook of Chaos Control*. Hrsg. von H. SCHUSTER. Wiley-VCH, 1999.
- [Ris96] H. RISKEN. *The Fokker-Planck-Equation. Methods of Solution and Applications*. Springer Series in Synergetics 18. Springer Berlin Heidelberg, 1996. DOI: [10.1007/978-3-642-61544-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61544-3).
- [Rös76] O. RÖSSLER. “An equation for continuous chaos”. In: *Physics Letters A* 57 (5 1976). Elsevier B.V. DOI: [10.1016/0375-9601\(76\)90101-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(76)90101-8).

- [RP07] M. ROSENBLUM und A. PIKOVSKY. “Self-Organized Quasiperiodicity in Oscillator Ensembles with Global Nonlinear Coupling”. In: *Physical Review Letters* 98 (6 2007). American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.064101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.064101).
- [RPK96] M. ROSENBLUM, A. PIKOVSKY und J. KURTHS. “Phase Synchronization of Chaotic Oscillators”. In: *Physical Review Letters* 76 (11 1996). American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevLett.76.1804](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.1804).
- [RPK97] M. ROSENBLUM, A. PIKOVSKY und J. KURTHS. “Phase synchronization of chaotic oscillators and analysis of bivariate data”. In: *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”* 133 (Past and Present Variability of the Solar-Terrestrial System 1997). IOS Press. DOI: [10.3254/978-1-61499-218-9-263](https://doi.org/10.3254/978-1-61499-218-9-263).
- [Sak00] H. SAKAGUCHI. “Phase transition in globally coupled Rössler oscillators”. In: *Physical Review E* 61 (6 2000). American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevE.61.7212](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.61.7212).
- [SK86] H. SAKAGUCHI und Y. KURAMOTO. “A Soluble Active Rotator Model Showing Phase Transitions via Mutual Entrainment”. In: *Progress of Theoretical Physics* 76 (3 1986). DOI: [10.1143/PTP.76.576](https://doi.org/10.1143/PTP.76.576).
- [SPKR12] J. SCHWABEDAL, A. PIKOVSKY, B. KRALEMANN und M. ROSENBLUM. “Optimal phase description of chaotic oscillators”. In: *Physical Review E* 85 (2 2012). American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevE.85.026216](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.026216).
- [Str63] R. STRATONOVICH. *Topics in the Theory of Random Noise. Volume I.* Mathematics and its Applications 3. Gordon und Breach, Science Publishers, 1963.
- [Str67] R. STRATONOVICH. *Topics in the Theory of Random Noise. Volume II.* Mathematics and its Applications 3. Gordon und Breach, Science Publishers, 1967.
- [TZTPR12] A. TEMIRBAYEV, Z. ZHANABAEV, S. TARASOV, V. PONOMARENKO und M. ROSENBLUM. “Experiments on oscillator ensembles with global nonlinear coupling”. In: *Physical Review E* 85 (1 2012). American Physical Society. DOI: [10.1103/PhysRevE.85.015204](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.015204).